9.8 Zusammenfassung

LK

- Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Knotenmenge und einer Kantenmenge; die Kantenmenge ist eine Relation auf den Knoten. Ist sie symmetrisch, heißt der Graph ungerichtet. Tragen die Kanten zusätzlich Zahlen, heißt er gewichtet.
- Der Knotengrad zählt die Kanten an einem Knoten. Die Summe aller Grade ist doppelt so groß wie die Kantenzahl, also gerade.
- Schlicht heißt: keine Schlingen, keine Mehrfachkanten. Vollständig heißt: jeder mit jedem. Zusammenhängend heißt: von überall nach überall.
- Bäume sind zusammenhängende, kreisfreie Graphen mit genau $n - 1$ Kanten.
- Im Rechner steht ein Graph als Adjazenzmatrix (n^2 Plätze, schneller Kantentest) oder als Adjazenzliste (sparsam bei dünnen Graphen, schnelle Nachbarschaft). Reale Netze sind dünn, deshalb gewinnt fast immer die Liste.
- Die Breitensuche arbeitet mit einer Warteschlange und findet die Wege mit den wenigsten Kanten; die Tiefensuche arbeitet mit einem Stapel oder per Rekursion und läuft erst einmal in die Tiefe. Ohne Markieren der besuchten Knoten laufen beide im Kreis.
- Der Algorithmus von Dijkstra löst das Kürzeste-Wege-Problem in gewichteten Graphen, solange kein Gewicht negativ ist: immer den kleinsten offenen Knoten abhaken und die Nachbarn relaxieren.
- Der Algorithmus von Kruskal konstruiert einen minimalen Spannbaum: Kanten nach Gewicht sortieren und jede nehmen, die keinen Kreis schließt.
- Ein Eulerweg benutzt jede Kante einmal — ob es ihn gibt, verrät der Knotengrad. Ein Hamiltonkreis besucht jeden Knoten einmal — dafür ist kein einfaches Kriterium bekannt. Die gewichtete Fassung ist das Problem des Handlungsreisenden, dessen $\frac{(n-1)!}{2}$ Rundreisen jede Brute-Force-Suche sprengen.

Wiederholungsaufgaben

44. Definieren Sie einen gerichteten Graphen und erklären Sie, was es bedeutet, dass die Kantenmenge eine Relation ist.
45. Geben Sie zu einem selbst gezeichneten Graphen mit fünf Knoten die Adjazenzmatrix, die Adjazenzlisten und die mengentheoretische Darstellung an.
46. Führen Sie auf diesem Graphen Breiten- und Tiefensuche durch und zeichnen Sie beide Suchbäume.
47. Erklären Sie den Unterschied zwischen dem Ergebnis der Breitensuche und dem Ergebnis von Dijkstra. Wann liefern beide denselben Weg?
48. Vergleichen Sie Dijkstra und Kruskal: Was ist das Ziel, was die Strategie, und warum reicht bei Kruskal eine gierige Vorgehensweise?
49. Begründen Sie, warum sich das Rundreiseproblem nicht einfach dadurch lösen lässt, dass man zwischen allen Ortspaaren erst Dijkstra laufen lässt.
50. Modellieren Sie den Stundenplan Ihres Kurses als Graphen: Knoten sind Fächer, eine Kante verbindet zwei Fächer, wenn dieselbe Lehrkraft sie unterrichtet. Welche Frage über den Stundenplan beantwortet der Knotengrad?