9.7 Hamiltonkreise und das Problem des Handlungsreisenden LK

Euler fragte nach einem Weg über jede **Kante**. Die zweite berühmte Frage dreht das um: Gibt es einen Rundweg über jeden **Knoten** genau einmal?

Definition: Hamiltonkreis

Ein **Hamiltonkreis** ist ein geschlossener Weg, der jeden Knoten des Graphen genau einmal besucht. Benannt ist er nach dem irischen Mathematiker William Rowan Hamilton.

Die beiden Fragen sehen sich zum Verwechseln ähnlich — und könnten in ihrer Schwierigkeit kaum weiter auseinanderliegen. Für den Eulerweg genügt ein Blick auf die Knotengrade. Für den Hamiltonkreis ist bis heute **kein** vergleichbar einfaches Kriterium bekannt, und es wird vermutet, dass es keines gibt.

Beispiel: Die Rundreise durchs Saarland

Im Saarland-Graphen kommt man trotzdem mit reinem Nachdenken ans Ziel — über die Knotengrade.

Ottweiler hat nur zwei Nachbarn, Neunkirchen und St. Wendel. Ein Rundweg muss Ottweiler einmal betreten und einmal verlassen, also müssen **beide** Kanten an Ottweiler zur Tour gehören. Dasselbe gilt für Merzig mit seinen Nachbarn Saarbrücken und St. Wendel.

Vier Kanten liegen damit fest: NK – OTW, OTW – WND, WND – MZG und MZG – SB. Und jetzt kommt der entscheidende Schluss: St. Wendel hat damit **schon zwei** Kanten in der Tour. Mehr darf kein Knoten haben, also scheiden WND – SB und WND – HOM aus. Übrig bleibt der Streckenzug

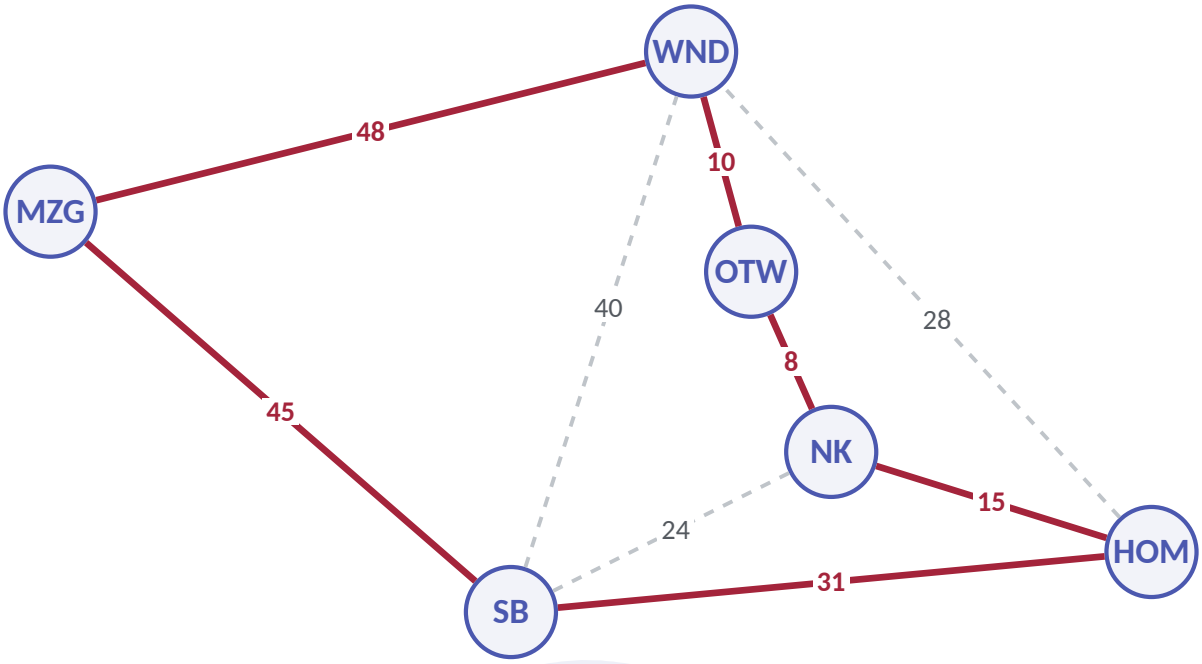
$$\text{NK} - \text{OTW} - \text{WND} - \text{MZG} - \text{SB}$$

mit den losen Enden NK und SB. Es fehlt nur noch Homburg, und der muss genau diese beiden Enden verbinden. Die Kanten NK – HOM und HOM – SB gibt es, also schließt sich der Kreis:

$$\text{SB} \to \text{MZG} \to \text{WND} \to \text{OTW} \to \text{NK} \to \text{HOM} \to \text{SB}$$

Die Länge: $45+48+10+8+15+31 = 157$ km. Und weil jeder Schritt der Überlegung erzwungen war, ist dies der **einzige** Hamiltonkreis des Graphen — gefunden ohne eine einzige durchprobierte Tour.

Gymnasium Ottweiler



SB → MZG → WND → OTW → NK → HOM → SB = 157 km

Der einzige Hamiltonkreis. Die drei gestrichelten Kanten bleiben ungenutzt.

Wenn der Graph gewichtet ist, interessiert nicht nur, *ob* es eine Rundreise gibt, sondern welche die **kürzeste** ist. Das ist das **Problem des Handlungsreisenden** (englisch *traveling salesman problem*, TSP) — eine Vertreterin soll alle Kunden besuchen und mit möglichst wenig Fahrerei wieder zu Hause ankommen.

Gymnasium Ottweiler

Beispiel: Vier Orte, drei Rundreisen

Für eine Rundreise zählt nicht, ob zwischen zwei Orten eine direkte Straße liegt, sondern nur, wie weit es ist. Wir nehmen deshalb nicht die Kantengewichte, sondern die **kürzesten Entfernungen** — und die hat Dijkstra im vorigen Abschnitt schon geliefert. Für Ottweiler, Neunkirchen, St. Wendel und Homburg sind das:

	NK	WND	HOM
OTW	8	10	23
NK	—	18	15
WND		—	28

Damit ist jeder Ort mit jedem verbunden, und es gibt genau drei verschiedene Rundreisen:

Rundreise	Rechnung	Länge
OTW → NK → HOM → WND → OTW	$8 + 15 + 28 + 10$	**61 km**
OTW → HOM → NK → WND → OTW	$23 + 15 + 18 + 10$	66 km
OTW → NK → WND → HOM → OTW	$8 + 18 + 28 + 23$	77 km

Bei vier Orten reicht Hinschreiben und Nachrechnen. Das ist kein Algorithmus, sondern erschöpfendes Durchprobieren — und genau da liegt das Problem.

Drei Möglichkeiten kann man durchprobieren. Und bei mehr Orten? In einem vollständigen Graphen mit n Knoten gibt es $\frac{(n-1)!}{2}$ verschiedene Rundreisen: $(n-1)!$ Reihenfolgen für die übrigen Knoten, geteilt durch 2, weil jede Tour vorwärts und rückwärts dieselbe ist.

Orte	Rundreisen
4	3
5	12
6	60
8	2 520
10	181 440
12	19 958 400
15	43 589 145 600
20	60 822 550 204 416 000

Gymnasium Ottweiler

Merke

Das Rundreiseproblem gehört zu den Aufgaben, für die kein Verfahren bekannt ist, das wesentlich besser wäre als Ausprobieren. Es ist damit ein Verwandter der Fragen aus Abschnitt 4.4: Nicht unlösbar — jede einzelne Instanz lässt sich im Prinzip ausrechnen —, aber für wachsendes n praktisch unbezahlbar.

Die Praxis lebt deshalb mit **Näherungen**. Ein einfaches Verfahren ist *Nächster Nachbar*: Fahre immer zum nächsten noch nicht besuchten Ort und am Ende zurück zum Start. Im Vier-Orte-Beispiel findet es von jedem Startort aus die 61 km — das Optimum. Garantiert ist das aber nicht, im Gegenteil: Mit mehr Orten wird das Verfahren regelmäßig schlechter, weil die letzte Rückfahrt beliebig teuer werden kann. Genau wie bei Kruskal im vorigen Abschnitt gilt: Gierig ist einfach, nicht richtig — nur hat man dort einen Beweis, hier nicht.

In der Logistik sind solche Näherungen trotzdem Alltag: Eine Tour, die 5 % länger ist als das Optimum, aber in einer Sekunde berechnet wird, ist einem perfekten Ergebnis nach drei Tagen Rechenzeit haushoch überlegen.

Arbeitsauftrag 7

37. Prüfen Sie die Überlegung aus dem Beispiel nach: Warum müssen beide Kanten an einem Knoten vom Grad 2 zu jedem Hamiltonkreis gehören?
38. Besitzt der Königsberger Graph einen Hamiltonkreis? Begründen Sie.
39. Geben Sie einen zusammenhängenden Graphen an, der einen Eulerkreis, aber keinen Hamiltonkreis besitzt — und einen mit Hamiltonkreis, aber ohne Eulerkreis.
40. Konstruieren Sie einen vollständigen Graphen mit vier Knoten, bei dem *Nächster Nachbar* vom Startknoten aus **nicht** die kürzeste Rundreise findet. Tipp: Die letzte Rückfahrt ist die Stelle, an der das Verfahren blind ist.
41. Ein Rechner prüft eine Million Rundreisen pro Sekunde. Wie lange braucht er bei 15, bei 20 Orten? Vergleichen Sie mit der Brute-Force-Tabelle aus Abschnitt 8.3.3.
42. Schreiben Sie ein Programm, das zu einem vollständigen gewichteten Graphen alle Rundreisen durchprobiert und die kürzeste ausgibt. Testen Sie es mit dem Vier-Orte-Beispiel. Ab wie vielen Orten wird Ihr Rechner spürbar langsam?
43. Erklären Sie den Unterschied zwischen Eulerweg und Hamiltonkreis in zwei Sätzen, ohne die Wörter „Kante” und „Knoten” zu verwechseln.

Gymnasium Ottweiler