9.2 Was ein Graph ist

LK

Formal ist ein Graph nichts weiter als zwei Mengen: die Dinge und die Verbindungen.

Definition: Gerichteter Graph

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$ aus

- einer endlichen Menge V von **Knoten** (englisch *vertices*) und
- einer Menge $E \subseteq V \times V$ von **Kanten** (englisch *edges*).

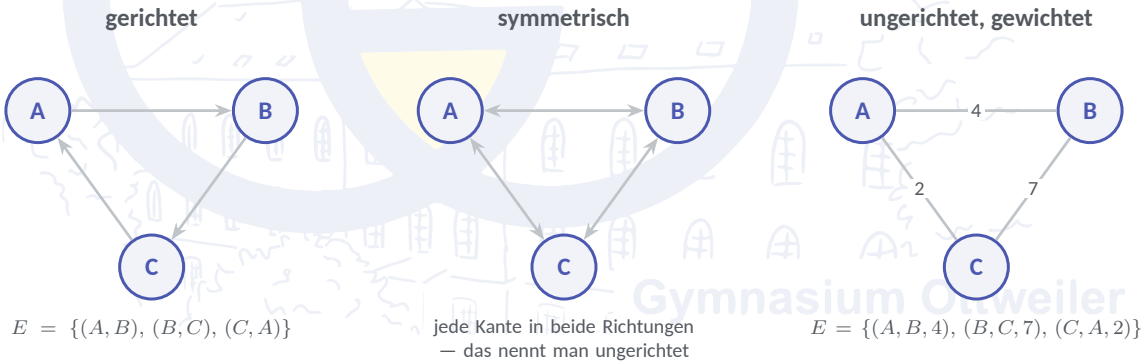
Eine Kante ist also ein *geordnetes Paar* (a, b) und zeigt von a nach b. Die Kantenmenge ist damit eine **Relation** auf der Knotenmenge.

Dass E eine Relation ist, ist keine Spitzfindigkeit, sondern das wichtigste Werkzeug dieses Kapitels: Fast jede Eigenschaft eines Graphen lässt sich an dieser Relation ablesen.

9.2.1 Gerichtet, ungerichtet, gewichtet

Bei manchen Beziehungen kommt es auf die Richtung an: Eine Webseite verlinkt eine andere, ohne dass zurückverlinkt wird. Bei anderen nicht: Wenn eine Straße Ottweiler mit Neunkirchen verbindet, dann verbindet sie auch Neunkirchen mit Ottweiler.

Man braucht dafür aber keine zweite Definition. Ein **ungerichteter** Graph ist einfach ein gerichteter, dessen Relation **symmetrisch** ist: Zu jeder Kante (a, b) gehört auch die Kante (b, a). Gezeichnet spart man sich dann die Pfeilspitzen und schreibt die Kante als Menge $\{a, b\}$.



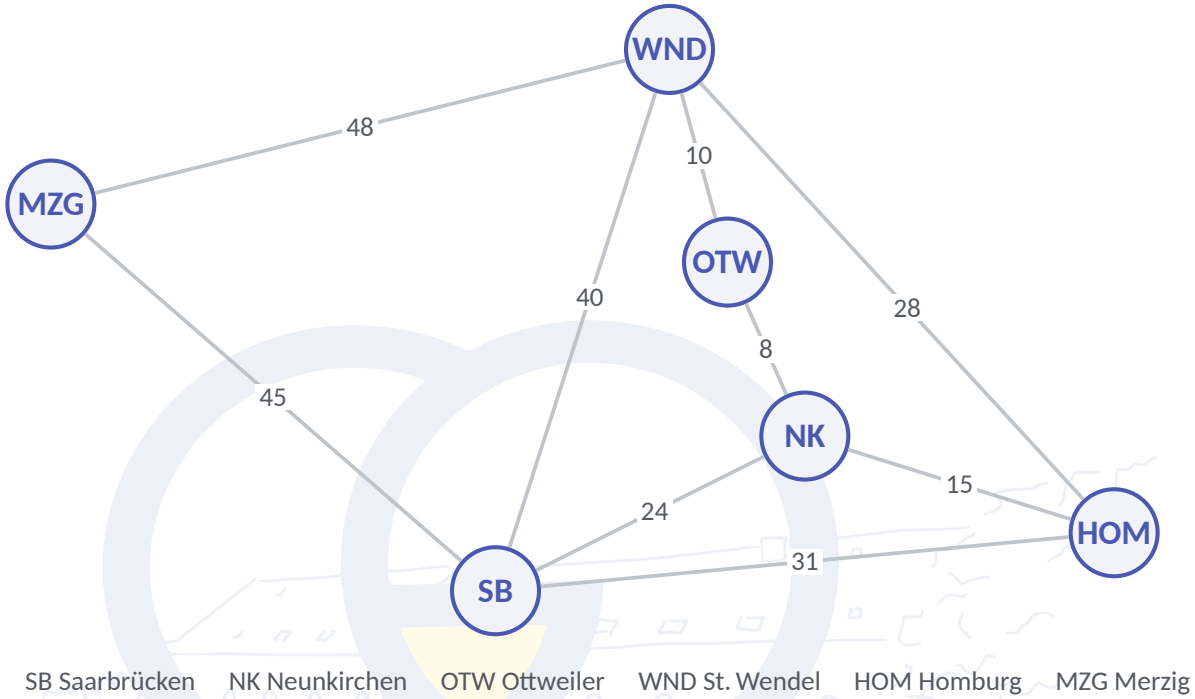
Drei Sichtweisen auf dieselbe Sache.

Kommt zu jeder Kante noch eine Zahl hinzu — eine Entfernung, eine Fahrzeit, eine Bandbreite, ein Preis —, heißt der Graph **gewichtet**. Aus den Paaren der Kantenmenge werden dann Tripel (a, b, w) mit dem **Gewicht** $w \in \mathbb{R}$.

Merke

Ungerichtet und gewichtet sind keine anderen Dinge, sondern Zusätze: *ungerichtet* heißt „die Kantenrelation ist symmetrisch", *gewichtet* heißt „jede Kante trägt zusätzlich eine Zahl". Jeder ungerichtete Graph lässt sich als gerichteter schreiben, indem man jede Kante durch zwei gegenläufige ersetzt.

Für den Rest des Kapitels arbeiten wir mit einem Beispiel aus der Nachbarschaft: sechs Orte im Saarland und die Straßen zwischen ihnen, mit den Entfernungen in Kilometern.



Der Saarland-Graph. Entfernungen in Kilometern, auf ganze Zahlen gerundet.

Mengentheoretisch aufgeschrieben ist das

$$V = \{\mathsf{SB}, \mathsf{NK}, \mathsf{OTW}, \mathsf{WND}, \mathsf{HOM}, \mathsf{MZG}\}$$

und, weil der Graph ungerichtet und gewichtet ist,

$$E = \{(\mathsf{SB}, \mathsf{NK}, 24),\ (\mathsf{SB}, \mathsf{HOM}, 31),\ (\mathsf{SB}, \mathsf{WND}, 40),\ (\mathsf{SB}, \mathsf{MZG}, 45),\ (\mathsf{NK}, \mathsf{OTW}, 8),$$
$$(\mathsf{NK}, \mathsf{HOM}, 15),\ (\mathsf{OTW}, \mathsf{WND}, 10),\ (\mathsf{HOM}, \mathsf{WND}, 28),\ (\mathsf{WND}, \mathsf{MZG}, 48)\}.$$

Neun Kanten für sechs Knoten.

Stolperstein

Zwischen Neunkirchen und St. Wendel steht keine Kante — obwohl man natürlich von einem Ort zum anderen fahren kann. Der Grund: Die Straße dorthin ist die B 41, und die führt **durch Ottweiler**. Eine Kante bedeutet „direkte Verbindung, ohne einen anderen Knoten des Modells zu berühren"; die 18 km von Neunkirchen nach St. Wendel stecken als $8 + 10$ bereits im Graphen. Nimmt man solche Durchfahrten zusätzlich als Kanten auf, zählt man Strecken doppelt und der Graph beschreibt ein Straßennetz, das es nicht gibt. Welche Verbindungen eine Kante verdienen, ist die erste und wichtigste Entscheidung beim Modellieren.

9.2.2 Grundbegriffe

Definition: Knotengrad

Der **Grad** $\deg(v)$ eines Knotens v in einem ungerichteten Graphen ist die Anzahl der Kanten, die an ihm hängen.

In einem gerichteten Graphen unterscheidet man den **Eingangsgrad** (wie viele Kanten enden hier) vom **Ausgangsgrad** (wie viele beginnen hier).

Im Saarland-Graphen ist $\deg(\text{SB}) = 4$ und $\deg(\text{MZG}) = 2$. Zählt man alle Grade zusammen, kommt $4 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 = 18$ heraus — genau das Doppelte der neun Kanten. Das ist kein Zufall: Jede Kante hat zwei Enden und wird deshalb bei genau zwei Knoten mitgezählt.

Merke

Handschlaglemma. In jedem ungerichteten Graphen gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

Die Summe aller Knotengrade ist also immer gerade. Daraus folgt unmittelbar: Die Anzahl der Knoten mit *ungeradem* Grad ist in jedem Graphen gerade.

Drei weitere Eigenschaften braucht man ständig:

- Ein Graph heißt **schlicht**, wenn er keine Schlingen (Kanten von einem Knoten zu sich selbst) und keine Mehrfachkanten enthält. Der Saarland-Graph ist schlicht, der Königsberger Graph nicht — dort gibt es ja Doppelbrücken.
- Ein Graph heißt **vollständig**, wenn jeder Knoten mit jedem anderen direkt verbunden ist. Ein vollständiger schlichter Graph mit n Knoten hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten; bei sechs Knoten wären das 15. Unser Graph hat nur 9 Kanten, ist also nicht vollständig.
- Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn es zwischen je zwei Knoten einen Weg gibt. Der Saarland-Graph ist zusammenhängend — man kommt von überall überallhin. Nähme man die beiden Kanten an Merzig weg, zerfiele er in zwei Teile.

Beispiel: Zurück nach Königsberg

Jetzt lässt sich Eulers Antwort in zwei Sätzen geben. Stellen Sie sich vor, Sie laufen den gesuchten Rundgang. Jedes Mal, wenn Sie ein Landstück betreten, müssen Sie es über eine *andere* Brücke wieder verlassen — Brücken verbrauchen sich ja. An jedem Landstück, das weder Start noch Ziel ist, werden die Brücken also **paarweise** benutzt, der Knotengrad muss dort gerade sein.

Im Königsberger Graphen haben *alle vier* Knoten ungeraden Grad: $\deg(A) = 5$, $\deg(B) = \deg(C) = \deg(D) = 3$. Start und Ziel könnten zwei davon entschuldigen, die anderen beiden nicht. **Es gibt keinen solchen Rundgang** — und bei einem geschlossenen Rundgang, der wieder am Ausgangspunkt endet, dürfte es sogar gar keinen ungeraden Knoten geben.

Ein Weg, der jede Kante genau einmal benutzt, heißt heute **Eulerweg**; ist er geschlossen, heißt er **Eulerkreis**. Eulers Ergebnis ist bemerkenswert, weil es die Frage nicht durch Probieren beantwortet, sondern durch eine Eigenschaft, die man in zehn Sekunden ablesen kann.

9.2.3 Bäume sind auch nur Graphen

Die Bäume aus Kapitel 3 lassen sich jetzt sauber einordnen: Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreise. Richtet man alle Kanten von der Wurzel weg, erhält man einen gerichteten, **azyklischen** Graphen, bei dem jeder Knoten außer der Wurzel genau einen Eingangsgrad 1 hat.

Merke

Ein Baum mit n Knoten hat immer genau $n - 1$ Kanten. Eine Kante weniger, und er zerfällt; eine Kante mehr, und er enthält einen Kreis.

Damit bekommt auch der Suchbaum aus Abschnitt 3.4 eine zweite Lesart: Er ist ein gerichteter azyklischer Graph, dessen Kanten zusätzlich sortiert sind.

Arbeitsauftrag 2

4. Geben Sie zum Saarland-Graphen V und E ohne Gewichte an, also als Menge von zweielementigen Mengen.
5. Bestimmen Sie alle sechs Knotengrade und prüfen Sie das Handschlaglemma nach.
6. Wie viele Kanten fehlen dem Saarland-Graphen zur Vollständigkeit? Welche sind das?
7. Begründen Sie, warum es keinen Graphen mit genau drei Knoten vom Grad 1 und sonst nur Knoten geraden Grades geben kann.
8. Zeichnen Sie einen zusammenhängenden schlichten Graphen mit fünf Knoten, der einen Eulerkreis besitzt. Geben Sie den Kreis an.
9. Hat der Saarland-Graph einen Eulerweg? Prüfen Sie mit dem Gradkriterium und begründen Sie Ihre Antwort.
10. Ein gerichteter Graph modelliert die Links zwischen fünf Webseiten. Welche Bedeutung haben Eingangs- und Ausgangsgrad eines Knotens für eine Suchmaschine?