5.7 Automaten mit Ausgabe

LK

LK

Der GK-Lehrplan nennt ausdrücklich „endliche Automaten **ohne** Ausgabe". Mealy- und Moore-Automaten samt Ausgabetabelle stehen nur im LK-Lehrplan — dort sogar mit genau dem Beispiel, das hier durchgerechnet wird: Erzeuger und Prüfer eines Paritätsbits.

Bisher konnte unser Automat nur eines: am Ende ja oder nein sagen. Ein Getränkeautomat tut mehr — er gibt Wechselgeld heraus, schaltet eine Lampe ein, wirft eine Flasche aus. Solche Maschinen liefern **während** des Lesens Ausgaben.

Der Akzeptor ist dafür der Sonderfall: ein Automat, dessen einzige Ausgabe die Antwort am Schluss ist. Die allgemeine Form hat ein **Ausgabealphabet** dazu.

Definition: Mealy- und Moore-Automat

Ein **endlicher Automat mit Ausgabe** ist ein **6-Tupel** $M = (Z, A, B, f, g, z_0)$: Zu Zustandsmenge, Eingabealphabet, Übergangsfunktion und Anfangszustand kommen ein **Ausgabealphabet** B und eine **Ausgabefunktion** g hinzu. Eine Finalmenge F gibt es nicht — die Antwort steckt in der Ausgabe, nicht im Zustand am Ende. Zwei Bauarten unterscheiden sich darin, *woran* die Ausgabe hängt:

- **Mealy-Automat**: $g : Z \times A \to B$ — die Ausgabe hängt an **Zustand und Eingabe**, steht also am Übergang. Geschrieben wird sie an den Pfeil als `Eingabe / Ausgabe`.
- **Moore-Automat**: $g : Z \to B$ — die Ausgabe hängt **nur am Zustand**. Sie steht im Kreis, die Pfeile tragen nur die Eingabe.

Beide sind gleich mächtig: Zu jedem Mealy-Automaten gibt es einen Moore-Automaten mit derselben Wirkung und umgekehrt. Der Mealy-Automat kommt dabei meist mit weniger Zuständen aus, der Moore-Automat ist leichter zu lesen.

Eine Ampel ist ein Moore-Automat: Welche Lampen leuchten, hängt allein an ihrem Zustand, und der Takt schaltet sie von Phase zu Phase. Der Getränkeautomat verhält sich wie ein Mealy-Automat: Die Flasche fällt in dem Moment, in dem die letzte Münze eingeworfen wird — die Ausgabe gehört zum Übergang, nicht zum Zustand.

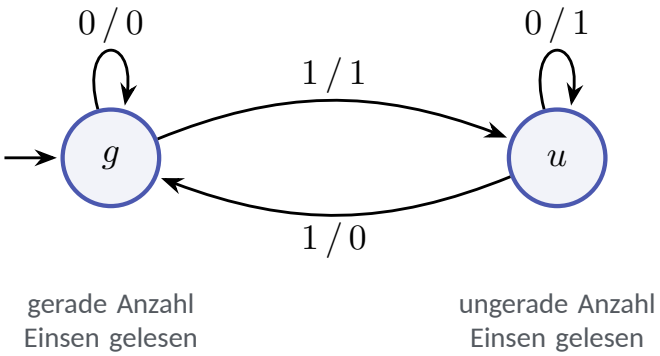
In der Webfassung steht hier ein Bedienfeld zum Ausprobieren: **Zustandsmaschine**.

In der Webfassung steht hier ein Bedienfeld zum Ausprobieren: **Zustandsmaschine**.

5.7.1 Beispiel: ein Paritätsbit erzeugen

Beim Übertragen von Daten hängt man oft ein **Paritätsbit** an: ein zusätzliches Bit, das so gewählt wird, dass die Gesamtzahl der Einsen **gerade** ist. Kippt unterwegs ein einzelnes Bit, stimmt die Rechnung nicht mehr und der Fehler fällt auf.

Der Erzeuger braucht dafür genau zwei Zustände — mehr muss er sich nicht merken:



Mealy-Automat zur Erzeugung des Paritätsbits. Am Pfeil steht `Eingabe / Ausgabe`.

Die Ausgabe ist jeweils die Parität **nach** dem gelesenen Zeichen. Das zuletzt ausgegebene Bit ist damit das gesuchte Paritätsbit.

Dieselbe Information als **Übergangs- und Ausgabetabelle**:

Zustand	bei 0	Ausgabe	bei 1	Ausgabe
g (gerade)	g	0	u	1
u (ungerade)	u	1	g	0

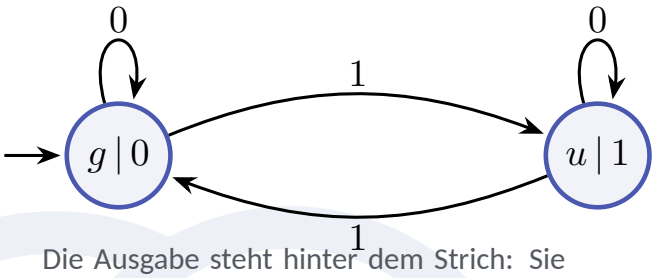
Gymnasium Ottweiler

Beispiel: Das Datenwort 1011

gelesen		**1**	**0**	**1**	**1**
Zustand	g	u	u	g	u
Ausgabe		1	1	0	1

Das letzte Ausgabebit ist 1 — gesendet wird also `10111`. Die Probe: `10111` enthält vier Einsen, und vier ist gerade.

Derselbe Automat als **Moore-Maschine**. Die Ausgabe wandert vom Pfeil in den Zustand:



Die Ausgabe steht hinter dem Strich: Sie gehört zum Zustand, nicht zum Übergang. Die Pfeile tragen nur noch die Eingabe.

Moore-Automat für dieselbe Aufgabe.

Die Tabelle wird dadurch schmaler — die Ausgabespalte gehört jetzt zum Zustand, nicht zum Übergang:

Zustand	**Ausgabe**	**bei 0**	**bei 1**
g (gerade)	0	g	u
u (ungerade)	1	u	g

Gymnasium Ottweiler

Stolperstein

Zählen Sie die Ausgaben nach: Der Mealy-Automat liefert zu `1011` die vier Bits $1, 1, 0, 1$ — eines pro gelesenem Zeichen. Der Moore-Automat liefert fünf, nämlich $0, 1, 1, 0, 1$: Er gibt schon im Anfangszustand aus, bevor überhaupt ein Zeichen gelesen ist. Das letzte Bit ist in beiden Fällen dasselbe und damit das gesuchte Paritätsbit; bei einem Wort der Länge n hat ein Mealy-Automat aber n Ausgaben und ein Moore-Automat $n + 1$. „Gleich mächtig" heißt also nicht „Ausgabe für Ausgabe gleich".

5.7.2 Beispiel: das Paritätsbit prüfen

Auf der Empfängerseite genügt wieder ein Akzeptor — hier interessiert nur ja oder nein. Er liest Datenwort *und* Paritätsbit und akzeptiert, wenn die Zahl der Einsen gerade ist:

$$M = (\{g, u\},\ \{0, 1\},\ f,\ g,\ \{g\}) \quad \text{mit} \quad f(g,0) = g,\ f(g,1) = u,\ f(u,0) = u,\ f(u,1) = g$$

Vergleichen Sie ihn mit dem Automaten aus Aufgabe 26: Dieselben Übergänge, aber der jeweils andere Zustand ist Endzustand. Zwei Automaten, die sich nur in der Finalmenge unterscheiden, akzeptieren genau die zueinander komplementären Sprachen.

Merke

Erzeuger und Prüfer haben denselben Zustandsgraphen. Der Unterschied liegt allein darin, was man von ihm will: Der **Erzeuger** gibt bei jedem Schritt etwas aus, der **Prüfer** sagt am Ende nur, ob er in einem Endzustand steht.

Stolperstein

Ein Paritätsbit erkennt **einen** gekippten Bitfehler sicher. Kippen **zwei** Bits, ist die Parität wieder in Ordnung und der Fehler bleibt unentdeckt. Und korrigieren kann es gar nichts — es sagt nur, dass etwas falsch ist, nicht was.

Arbeitsauftrag 8

30. Lassen Sie den Erzeuger auf `1101` und `0000` laufen. Notieren Sie Zustände und Ausgaben wie in der Tabelle oben. Welches Paritätsbit wird angehängt?
31. Prüfen Sie mit dem Prüfer die Wörter `10111`, `10011` und `11011`. Welche sind unterwegs verfälscht worden?
32. Zeichnen Sie einen Mealy-Automaten für einen Getränkeautomaten, der 50-Cent- und 1-Euro-Stücke annimmt und bei 1,50 € eine Flasche ausgibt. Was gibt er bei 2 € aus?
33. Ein Moore-Automat gibt bei jedem gelesenen Zeichen aus, ob die bisher gelesene Zeichenzahl gerade ist. Zeichnen Sie ihn.
34. Geben Sie denselben Automaten als Mealy-Automat an. Wie viele Ausgaben liefern die beiden zu einem Wort der Länge 6?
35. Begründen Sie, warum der Akzeptor ein Sonderfall des Automaten mit Ausgabe ist.