3.7 Kapitel 3 kompakt: der Lernzettel

Leitidee

Dieser Lernzettel fasst das Kapitel auf wenigen Seiten zusammen. Nutze ihn zum Wiederholen vor einem Test. Ausführliche Erklärungen, Beispiele und Übungen findest du in den einzelnen Abschnitten.

3.7.1 Problem, Probleminstanz, Darstellung (Abschnitt 3.1)

- **Problem:** allgemeine Fragestellung mit Leerstellen. *„Finde die kürzeste Rundreise durch beliebige Orte."*
- **Probleminstanz:** konkreter Fall, alle Werte stehen fest. *„… durch genau diese 4 Orte mit diesen Entfernungen."*
- Test: Könnte ich **sofort losrechnen**? Ja → Instanz. Signalwörter für ein Problem: „beliebig", „begrenzt", „eine".
- **Abstrahierte Darstellung:** nur das, was für das Problem wichtig ist. Formen: **Tabelle** (Entfernungstabelle), **Graph** (Knoten = Orte/Objekte, Kanten = Verbindungen, Kantengewicht = Entfernung), **Liste** (Gegenstände mit Gewicht und Wert).
- **Problem des Handlungsreisenden:** kürzeste **Rundreise**, die jeden Ort genau einmal besucht und zum Start zurückkehrt.
- **Symmetrie:** Ist Hinweg = Rückweg (Tabelle spiegelbildlich zur Diagonale), sind eine Rundreise und ihre Rückwärts-Rundreise gleich lang. Man muss nur die Hälfte untersuchen.

	A	B	C	D
A	–	10	15	20
B	10	–	35	25
C	15	35	–	30
D	20	25	30	–

Lesen: Zeile B, Spalte D → 25 km. Jede Zahl steht zweimal (symmetrisch).

Typische Fehler: die gezeichnete Länge einer Kante statt des Kantengewichts verwenden; Symmetrie annehmen, obwohl Hin- und Rückweg verschieden sind (z. B. Fahrzeiten bergauf und bergab).

3.7.2 Optimale Lösung und Brute-Force (Abschnitt 3.2)

- **Zulässige Lösung:** erfüllt alle Bedingungen (jeder Ort genau einmal, zurück zum Start).
- **Optimale Lösung:** die beste zulässige Lösung bezüglich eines festgelegten **Kriteriums** (z. B. Gesamtlänge). Ohne Kriterium kein „optimal". Es kann mehrere optimale Lösungen geben.
- **Länge einer Rundreise:** alle Teilstrecken addieren, **die Rückfahrt gehört dazu**. A → B → D → C → A: $10 + 25 + 30 + 15 = 80$ km.
- **Brute-Force:** alle zulässigen Lösungen **erzeugen**, **bewerten**, die beste **auswählen**. Vorteil: garantiert optimal. Nachteil: Die Anzahl der Lösungen wächst sehr schnell.
- **Anzahl der Rundreisen** bei n Orten (Start fest): $(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$; mit Symmetrie $(n-1)! : 2$ verschiedene.

Typische Fehler: Rückfahrt vergessen; eine Rundreise doppelt zählen, eine andere vergessen; bei Brute-Force zu früh aufhören; $(n-1)!$ ohne Klammer rechnen.

3.7.3 Heuristiken und Greedy (Abschnitt 3.3)

- **Heuristik:** Lösungsstrategie, die **schnell** eine (meist gute, aber **nicht garantiert optimale**) Lösung liefert, ohne alle Möglichkeiten zu prüfen.
- **Greedy-Heuristik** („gierig"): wählt in jedem Schritt, was **im Moment** am besten aussieht; spätere Folgen werden nicht bedacht, Entscheidungen nie zurückgenommen.
- **Nearest Neighbor** (Handlungsreisender): vom aktuellen Ort immer zum **nächstgelegenen, noch nicht besuchten** Ort; am Ende zurück zum Start.

Schritt	aktueller Ort	noch nicht besucht	Wahl
1	A	B 10, C 15, D 20	B (10)
2	B	C 35, D 25	D (25)
3	D	C 30	C (30)
4	C	–	zurück nach A (15)

Ergebnis: 80 km, hier optimal. Mit Start in D: 95 km, nicht optimal. Das Ergebnis kann vom Startort abhängen.

- **Abweichung in Prozent** (kleiner ist besser): $\frac{\text{Heuristik} - \text{Optimum}}{\text{Optimum}} \cdot 100\,\%$, z. B. $\frac{95-80}{80} \cdot 100\,\% \approx 18{,}8\,\%$.

Typische Fehler: einen schon besuchten Ort wählen; „vorausschauen" (das macht Nearest Neighbor nicht); durch die Länge der Heuristik statt durch das Optimum teilen.

3.7.4 Das Rucksackproblem (Abschnitt 3.4)

- Gegenstände mit **Gewicht** und **Wert**, ein Rucksack mit **Tragkraft**. Gesucht: Auswahl mit **maximalem Gesamtwert**, deren Gesamtgewicht die Tragkraft **nicht übersteigt** (genau gleich ist erlaubt).
- **Brute-Force:** alle **Teilmengen** bilden und bewerten. Jeder Gegenstand: mit oder ohne → bei n Gegenständen 2^n Teilmengen (die leere Auswahl zählt mit).
- **Greedy-Heuristik: Wert-Gewicht-Verhältnis** (Wert : Gewicht) berechnen, absteigend sortieren, der Reihe nach einpacken, was noch passt – **bis zum Ende der Liste**.
- Beispiel (Tragkraft 10 kg): Zelt 5 kg/60 €, Schlafsack 4 kg/40 €, Kocher 2 kg/30 €, Proviant 3 kg/25 €, Erste-Hilfe-Set 1 kg/20 €. Greedy: Erste-Hilfe-Set, Kocher, Zelt → 8 kg, 110 €. Optimal (Brute-Force): Zelt, Schlafsack, Erste-Hilfe-Set → 10 kg, 120 €. Greedy lässt 2 kg ungenutzt.
- **Gegenbeispiel:** Eine einzige Instanz, bei der die Heuristik schlechter ist als das Optimum, zeigt: Die Heuristik ist nicht immer optimal.

Typische Fehler: Gewicht : Wert statt Wert : Gewicht; beim ersten Gegenstand, der nicht passt, aufhören; nach dem Wert statt nach dem Verhältnis sortieren; die leere Teilmenge beim Zählen vergessen.

3.7.5 Aufwand (Abschnitt 3.5)

- **Aufwand** anschaulich: **Anzahl der zu prüfenden Möglichkeiten** oder **gemessene Rechenzeit**.
- Brute-Force beim Handlungsreisenden: $(n-1)!$, **faktorielles** Wachstum. Von n auf $n+1$ Orte: Faktor n.
- Brute-Force beim Rucksack: 2^n, **exponentielles** Wachstum. Jeder weitere Gegenstand: Faktor 2.
- Greedy-Heuristiken prüfen **wesentlich weniger** Möglichkeiten (vor allem Sortieren und einmal Durchgehen).
- Schon bei mäßig großen Instanzen ist der Unterschied **drastisch**.

n	**4**	**5**	**6**	**8**	**10**	**12**	**20**
$(n-1)!$	6	24	120	5 040	362 880	39 916 800	$\approx 1{,}2 \cdot 10^{17}$
2^n	16	32	64	256	1 024	4 096	1 048 576

Typische Fehler: faktoriell und exponentiell verwechseln (Rundreisen → Fakultät, Teilmengen → Zweierpotenz); bei Zeitabschätzungen die Einheiten (Sekunden, Minuten, Tage) durcheinanderbringen.

3.7.6 Heuristiken bewerten (Abschnitt 3.6)

- Bewerten = Lösung der Heuristik mit der **optimalen** Lösung vergleichen (wenn diese bekannt bzw. berechenbar ist), üblich als **prozentuale Abweichung**.
- Beim Rucksack ist größer besser: $\frac{\text{Optimum} - \text{Heuristik}}{\text{Optimum}} \cdot 100\,\%$, z. B. $\frac{120-110}{120} \cdot 100\,\% \approx 8{,}3\,\%$.
- Eine Heuristik kann bei manchen Instanzen optimal sein (0 %) und bei anderen deutlich schlechter. **Ein einzelner Test reicht nicht.**
- Verlässlich: an **mehreren, möglichst unterschiedlichen** Instanzen testen, **durchschnittliche** Abweichung berechnen und die **größte** Abweichung nennen.
- Durchschnitt: alle Abweichungen addieren, durch ihre Anzahl teilen. $(0+0+0+18{,}75) : 4 \approx 4{,}7\,\%$.

Typische Fehler: nur den Durchschnitt nennen (ein großer Ausreißer geht unter); nur Instanzen testen, bei denen die Heuristik gut oder nur schlecht abschneidet.

So kannst du es sagen

- *„Es handelt sich um ein Problem/eine Probleminstanz, weil …“*
- *„Der Ansatz prüft/wählt … und benötigt dabei …“*
- *„Die Heuristik ist hier geeignet/nicht geeignet, weil …“*