3.6 Heuristiken bewerten und Rückblick

Leitidee

Du hast gesehen: Die Nearest-Neighbor-Heuristik findet bei den vier Orten manchmal die optimale Rundreise und manchmal nicht. Die Greedy-Heuristik für den Rucksack war beim Tagesausflug optimal, bei der Wanderung nicht. Wie gut ist eine Heuristik denn nun? Mit einem einzigen Test kann man das nicht sagen – so wie man ein Navigationsgerät nicht nach einer einzigen Fahrt beurteilt. In diesem Abschnitt lernst du, wie man Heuristiken an **vielen** Probleminstanzen prüft und das Ergebnis in Zahlen fasst. Zum Schluss blickst du auf das ganze Kapitel zurück und bereitest dich auf einen möglichen Test vor.

Lernziele

Nach diesem Abschnitt kannst du

- die Abweichung einer Heuristik von der optimalen Lösung in Prozent berechnen, für Probleme mit kleinster und mit größter Zielgröße,
- erklären, warum man eine Heuristik an mehreren, möglichst unterschiedlichen Probleminstanzen testen muss,
- die durchschnittliche Abweichung berechnen und deuten,
- beurteilen, ob eine Heuristik für den praktischen Einsatz geeignet ist,
- die wichtigsten Begriffe des Kapitels erklären und an Beispielen anwenden.

3.6.1 Die Abweichung als Maßstab

Um eine Heuristik zu bewerten, vergleicht man ihre Lösung mit der optimalen Lösung. Dafür muss die optimale Lösung bekannt sein. Bei kleinen Probleminstanzen kann man sie mit Brute-Force berechnen. Üblich ist es, den Unterschied in **Prozent** anzugeben. So kann man auch Instanzen mit ganz unterschiedlichen Zahlen vergleichen: 10 km Umweg sind bei einer 50-km-Tour viel, bei einer 500-km-Tour wenig.

Du kennst schon zwei Formeln. Beim Handlungsreisenden ist eine **kleinere** Länge besser:

$$\text{Abweichung} = \frac{\text{Länge der Heuristik} - \text{optimale Länge}}{\text{optimale Länge}} \cdot 100\,\%$$

Beim Rucksackproblem ist ein **größerer** Wert besser:

$$\text{Abweichung} = \frac{\text{optimaler Wert} - \text{Wert der Heuristik}}{\text{optimaler Wert}} \cdot 100\,\%$$

In beiden Fällen gilt: Man teilt durch das Optimum, und das Ergebnis ist nie negativ. 0 % bedeutet, dass die Heuristik die optimale Lösung getroffen hat. Je größer die Abweichung, desto schlechter.

Merke

Um eine Heuristik zu **bewerten**, vergleicht man ihre Lösung mit der **optimalen** Lösung (sofern diese bekannt bzw. berechenbar ist). Üblich ist die **prozentuale Abweichung**.

3.6.2 Eine Heuristik, viele Probleminstanzen

Ein einziger Test sagt wenig. Vielleicht hatte die Heuristik Glück, vielleicht Pech. Das hast du schon bei den vier Orten A, B, C und D erlebt: Mit Start in A war Nearest Neighbor optimal, mit Start in D um 18,75 % zu lang.

Merke

- Eine Heuristik kann bei **manchen** Probleminstanzen die optimale Lösung treffen und bei **anderen** deutlich schlechter abschneiden – deshalb reicht ein einzelner Test nicht aus.
- Zur verlässlichen Bewertung testet man eine Heuristik an **mehreren, möglichst unterschiedlichen** Probleminstanzen und betrachtet z. B. die **durchschnittliche** Abweichung.

Den **Durchschnitt** (das arithmetische Mittel) kennst du aus Mathe: Man addiert alle Werte und teilt durch ihre Anzahl.

Gymnasium Ottweiler

Beispiel: Nearest Neighbor mit allen Startorten

Für die vier Orte A, B, C, D (optimal: 80 km) und die fünf Orte A bis E (optimal: 100 km) wurde Nearest Neighbor von jedem Startort aus durchgeführt:

Startort	A	B	C	D	E	Durchschnitt
vier Orte: Länge	80	80	80	95	–	
vier Orte: Abweichung	0 %	0 %	0 %	18,75 %	–	4,7 %
fünf Orte: Länge	111	100	100	110	100	
fünf Orte: Abweichung	11 %	0 %	0 %	10 %	0 %	4,2 %

Rechnung für vier Orte: $(0+0+0+18{,}75) : 4 \approx 4{,}7$ (in Prozent). Für fünf Orte: $(11+0+0+10+0) : 5 = 4{,}2$ (in Prozent).

Im Durchschnitt liegt die Heuristik also weniger als 5 % über dem Optimum. Im ungünstigsten Fall waren es aber fast 19 %. Beides gehört zu einer ehrlichen Bewertung: der **Durchschnitt** und der **schlechteste Fall**.

3.6.3 Ein Computerexperiment

Mit vier oder fünf Orten kann man nicht viel über eine Heuristik lernen. Für ein aussagekräftigeres Ergebnis hat ein Computer das folgende Experiment durchgeführt:

- Er hat **10 Probleminstanzen** mit je **6 Orten** erzeugt. Die Entfernungen wurden zufällig zwischen 5 und 50 km gewählt (symmetrisch, also Hinweg = Rückweg).
- Für jede Instanz hat er mit **Brute-Force** die optimale Rundreise berechnet (bei 6 Orten sind das $5! = 120$ Rundreisen).
- Außerdem hat er **Nearest Neighbor** angewendet, jeweils mit dem ersten Ort als Start. Bei gleich weit entfernten Orten hat er den im Alphabet früheren genommen.
- Zum Schluss hat er die Abweichung in Prozent und deren Durchschnitt berechnet.

Instanz	optimal (km)	Nearest Neighbor (km)	Abweichung
1	119	119	0,0 %
2	92	92	0,0 %
3	79	79	0,0 %
4	122	124	1,6 %
5	81	81	0,0 %
6	113	113	0,0 %
7	78	109	39,7 %
8	67	75	11,9 %
9	83	87	4,8 %
10	114	135	18,4 %
Durchschnitt			**7,7 %**

Du kannst einzelne Zeilen nachrechnen. Für Instanz 4 zum Beispiel: $\frac{124-122}{122} \cdot 100\,\% \approx 1{,}6\,\%$.

Arbeitsauftrag 62: Auswertung des Experiments

Beantworte anhand der Tabelle:

1. Gab es Instanzen, bei denen die Heuristik die optimale Lösung getroffen hat (Abweichung 0 %)? Wie viele?
2. Wie groß war die größte beobachtete Abweichung, und bei welcher Instanz trat sie auf?
3. Ist die Nearest-Neighbor-Heuristik deiner Einschätzung nach für den praktischen Einsatz geeignet? Begründe.

Deine Antworten:

Gymnasium Ottweiler

Stolperstein

Der Durchschnitt allein kann täuschen. 7,7 % klingt harmlos, aber bei Instanz 7 waren es fast 40 %. Nenne bei einer Bewertung deshalb immer auch den **schlechtesten Fall**. Und: Zehn Instanzen sind schon besser als eine, aber für eine wirklich sichere Aussage testet man viel mehr – und auch größere Instanzen.

3.6.4 Die Ausreißer-Instanz genauer untersucht

Warum hat Nearest Neighbor bei Instanz 7 so schlecht abgeschnitten? Das kannst du selbst herausfinden. Die Orte heißen hier A bis F.

Arbeitsauftrag 63: Instanz 7 von Hand

Hier ist die Entfernungstabelle von Instanz 7 (in km):

	A	B	C	D	E	F
A	–	41	10	36	21	7
B	41	–	5	14	47	42
C	10	5	–	35	28	25
D	36	14	35	–	6	22
E	21	47	28	6	–	36
F	7	42	25	22	36	–

1. Wende die Nearest-Neighbor-Heuristik mit Start in **A** an. Gib die Rundreise und ihre Länge an.
2. Der Computer hat als optimale Rundreise A → C → B → D → E → F → A gefunden. Berechne ihre Länge.
3. Berechne die Abweichung. Erkläre, an welcher Stelle die Heuristik „in die Falle läuft“.
4. Wende Nearest Neighbor noch einmal an, diesmal mit Start in **C**. Was stellst du fest?

Gymnasium Ottweiler

Deine Tabellen und Rechnungen:

3.6.5 Auch die Rucksack-Heuristik auf dem Prüfstand

Dieselbe Bewertungsmethode funktioniert für jede Heuristik. Eine einfache Art, mehrere Probleminstanzen zu bekommen: Man nimmt dieselben Gegenstände, ändert aber die **Tragkraft**. Jede Tragkraft ergibt eine neue Probleminstanz.

Arbeitsauftrag 64: Greedy bei verschiedenen Tragkräften

Nimm die Gegenstände der Wanderung (Zelt 5 kg/60 €, Schlafsack 4 kg/40 €, Kocher 2 kg/30 €, Proviant 3 kg/25 €, Erste-Hilfe-Set 1 kg/20 €). Die sortierte Reihenfolge nach dem Wert-Gewicht-Verhältnis kennst du schon: Erste-Hilfe-Set, Kocher, Zelt, Schlafsack, Proviant.

1. Wende die Greedy-Heuristik für die Tragkräfte 6 kg, 8 kg und 12 kg an. (Für 10 kg kennst du das Ergebnis schon.)
2. Ein Computer hat mit Brute-Force die optimalen Werte berechnet. Trage die Abweichungen ein und berechne die durchschnittliche Abweichung.
3. Beurteile kurz, wie gut die Greedy-Heuristik bei diesen Instanzen funktioniert.

Tragkraft	optimaler Wert	Greedy-Auswahl	Greedy-Wert	Abweichung
6 kg	80 €			
8 kg	110 €			
10 kg	120 €	Erste-Hilfe-Set, Kocher, Zelt	110 €	
12 kg	150 €			

Durchschnitt und Beurteilung:

So kannst du es sagen

So formulierst du eine Bewertung in Fachsprache:

- *„Die Heuristik ist ganz gut.“ → „Die Heuristik weicht im Durchschnitt um 7,7 % von der optimalen Lösung ab.“*
- *„Manchmal geht es schief.“ → „Im schlechtesten untersuchten Fall beträgt die Abweichung 39,7 %.“*
- *„Ich finde sie brauchbar.“ → „Wegen des geringen Aufwands und der meist kleinen Abweichung ist die Heuristik für große Probleminstanzen geeignet.“*

3.6.6 Rückblick: das Kapitel im Überblick

Zum Abschluss lohnt sich ein Blick auf das ganze Kapitel. Eine Übersicht über alle Fachbegriffe mit Beispielen findest du im Rückblick am Ende des Kapitels. Wenn du bei einem Begriff unsicher bist, lies im passenden Abschnitt nach.

Arbeitsauftrag 65: Zusammenfassung des Kapitels

Beantworte in eigenen Worten. Die Fragen sind eine gute Vorbereitung auf einen Test.

1. Was ist der Unterschied zwischen einem Problem und einer Probleminstanz?
2. Wann liefert ein Brute-Force-Ansatz garantiert die optimale Lösung, und wo liegt sein Nachteil?
3. Was zeichnet eine Greedy-Heuristik aus, und welches Risiko birgt sie?
4. Nenne je ein Beispiel für ein Problem mit faktoriellem und eines mit exponentiellem Brute-Force-Aufwand.

Gymnasium Ottweiler

Deine Antworten:

Gymnasium Ottweiler

3.6.7 Ausblick: weitere Probleme und warum Optimieren nachhaltig ist

Das Problem des Handlungsreisenden und das Rucksackproblem sind nur zwei Beispiele. Mit denselben Werkzeugen untersucht man viele weitere Probleme:

- **Kürzeste Wege** (*Shortest Path Problem*): Ein Navigationsgerät sucht den kürzesten Weg von A nach B in einem Straßengraphen. Hier gibt es mit dem **Dijkstra-Algorithmus** ein Verfahren, das schnell **und** garantiert optimal ist. Das ist eine Ausnahme.
- **Behälterproblem** (*Bin Packing*): Gegenstände sollen in möglichst wenige Kisten gleicher Größe gepackt werden, zum Beispiel Pakete in Lieferwagen. Eine einfache Heuristik heißt **First Fit**: Lege jeden Gegenstand in die erste Kiste, in die er noch passt.
- **Aufgabenplanung** (*Scheduling*): In welcher Reihenfolge erledigt man Aufträge, damit alle möglichst früh fertig sind? Eine Heuristik lautet: „Kürzeste Aufgabe zuerst."

Optimieren spart nicht nur Zeit, sondern auch **Ressourcen**. Kürzere Touren von Paketdiensten und Müllfahrzeugen sparen Kraftstoff und vermeiden CO_2-Ausstoß. Gut gepackte Lieferwagen und Container bedeuten weniger Fahrten. Ein guter Plan für Busse oder Maschinen spart Energie. Auch die Rechenzeit selbst verbraucht Strom: Eine Heuristik, die in Sekunden eine gute Lösung findet, kann sinnvoller sein als eine Rechnung, die tagelang einen Großrechner beschäftigt. Optimierungsprobleme sind deshalb ein wichtiges Werkzeug für **nachhaltiges Ressourcenmanagement**.

Arbeitsauftrag 66 (Zusatz): Kisten packen mit First Fit

Kisten tragen höchstens **10 kg**. Fünf Pakete wiegen 6 kg, 5 kg, 4 kg, 3 kg und 2 kg. Lege jedes Paket der Reihe nach in die **erste** Kiste, in die es noch passt. Passt es in keine, öffne eine neue Kiste.

1. Wende First Fit in der Reihenfolge 6, 5, 4, 3, 2 an. Wie viele Kisten brauchst du?
2. Wende First Fit in der Reihenfolge 2, 3, 4, 5, 6 an. Wie viele Kisten brauchst du jetzt?
3. Wie viele Kisten braucht man mindestens? Begründe. Was folgt daraus für die Heuristik?

Gymnasium Ottweiler

Deine Kisten und deine Begründung:

3.6.8 Weitere Übungen

Hier kannst du das Gelernte weiter üben. Die Punkte im Titel zeigen, wie schwer eine Aufgabe ist: ●○○ leicht, ●●○ mittel, ●●● knifflig. Fang mit den leichten an.

Arbeitsauftrag 67: Abweichungen berechnen ●○○

Eine Heuristik für das Problem des Handlungsreisenden wurde an fünf Probleminstanzen getestet. Berechne jeweils die prozentuale Abweichung vom Optimum. Runde auf eine Stelle nach dem Komma.

Instanz	Länge der Heuristik	optimale Länge	Abweichung
1	36 km	30 km	
2	44 km	40 km	
3	25 km	20 km	
4	58 km	58 km	
5	52 km	48 km	

Arbeitsauftrag 68: Durchschnitt und schlechtester Fall ●○○

Eine Heuristik wurde an fünf Instanzen getestet. Die Abweichungen vom Optimum waren: 0 %, 5 %, 12 %, 0 %, 3 %.

1. Berechne die durchschnittliche Abweichung.
2. Nenne den schlechtesten Fall.
3. Bei wie vielen Instanzen war die Heuristik optimal?

Deine Antworten:

Arbeitsauftrag 69: Richtig bewertet? ●○○

Entscheide, ob die Aussage richtig oder falsch ist. Begründe kurz.

Aussage	richtig oder falsch?	Begründung
Um eine Heuristik zu bewerten, vergleicht man ihre Lösung mit der optimalen Lösung.		
Hat eine Heuristik bei einer Instanz 0 % Abweichung, ist sie immer optimal.		
Man sollte eine Heuristik an möglichst unterschiedlichen Instanzen testen.		
Eine Abweichung von 0 % bedeutet, dass die Heuristik die optimale Lösung gefunden hat.		
Die Abweichung berechnet man, indem man durch die Länge der Heuristik teilt.		

Arbeitsauftrag 70: Zwei Navi-Apps im Test ●●○

Zwei Apps berechnen Lieferrouten mit unterschiedlichen Heuristiken. Beide wurden an denselben fünf Probleminstanzen getestet. Die optimalen Längen wurden mit Brute-Force bestimmt.

Instanz	optimal	App X	App Y
1	50 km	55 km	50 km
2	40 km	40 km	40 km
3	80 km	84 km	80 km
4	20 km	21 km	20 km
5	100 km	110 km	130 km

1. Berechne für beide Apps die Abweichung bei jeder Instanz.
2. Berechne für beide Apps die durchschnittliche Abweichung und nenne den schlechtesten Fall.
3. Welche App würdest du einer Lieferfirma empfehlen? Begründe.

Deine Rechnungen und deine Empfehlung:

Arbeitsauftrag 71: Die Rucksack-Heuristik bewerten ●●○

Die Greedy-Heuristik für das Rucksackproblem wurde an vier Instanzen aus diesem Kapitel getestet: an der Wanderung, an Bens Flohmarkt (Auftrag *Greedy am Flohmarkt*) und an zwei Instanzen aus dem Auftrag *Gegenbeispiel oder nicht?*. Beim Rucksack ist ein größerer Wert besser.

Instanz	optimaler Wert	Greedy-Wert	Abweichung
Wanderung	120 €	110 €	
Flohmarkt	68 €	61 €	
Noahs Gegenbeispiel	25 €	20 €	
Leas Gegenbeispiel	20 €	18 €	

1. Berechne die Abweichungen und ihren Durchschnitt. Runde auf eine Stelle nach dem Komma.
2. Mira sagt: „Die Greedy-Heuristik ist im Durchschnitt 12 % schlechter als das Optimum.“ Beurteile diese Aussage. Achte darauf, wie die vier Instanzen ausgewählt wurden.

Deine Rechnungen und deine Beurteilung:

Arbeitsauftrag 72: Ein Test von Hand ●●●

Teste die Nearest-Neighbor-Heuristik selbst an drei Probleminstanzen mit je vier Orten A, B, C, D (Entfernungen in km).

Instanz 1	A	B	C	D
A	–	10	4	6
B	10	–	8	4
C	4	8	–	10
D	6	4	10	–

Instanz 2	A	B	C	D
A	–	4	12	8
B	4	–	9	8
C	12	9	–	9
D	8	8	9	–

Instanz 3	A	B	C	D
A	–	4	2	9
B	4	–	6	7
C	2	6	–	7
D	9	7	7	–

1. Wende bei jeder Instanz Nearest Neighbor mit Start in A an.
2. Bestimme bei jeder Instanz mit Brute-Force die optimale Länge. Wegen der Symmetrie genügen die drei Rundreisen A → B → C → D → A, A → B → D → C → A und A → C → B → D → A.
3. Berechne die Abweichungen, ihren Durchschnitt und nenne den schlechtesten Fall.
4. Beurteile: Reichen drei Instanzen aus, um die Heuristik zu bewerten?

Gymnasium Ottweiler

Deine Rechnungen und deine Beurteilung:

Gymnasium Ottweiler

3.6.9 Das Wichtigste in Kürze

- Eine Heuristik **bewertet** man, indem man ihre Lösung mit der optimalen Lösung vergleicht und die **prozentuale Abweichung** berechnet. Geteilt wird immer durch das Optimum.
- Eine Heuristik kann bei manchen Instanzen optimal sein und bei anderen deutlich schlechter. Ein einzelner Test reicht deshalb nicht.
- Zuverlässig wird eine Bewertung erst mit **vielen, möglichst unterschiedlichen** Instanzen. Man betrachtet die **durchschnittliche** Abweichung und den **schlechtesten Fall**.
- Im Computerexperiment mit 10 zufälligen Instanzen (6 Orte) lag Nearest Neighbor im Durchschnitt 7,7 % über dem Optimum, im schlechtesten Fall 39,7 %.
- Kapitelüberblick: Problem und Probleminstanz → abstrahierte Darstellung → zulässige und optimale Lösung → Brute-Force (garantiert optimal, großer Aufwand) → Heuristik/Greedy (schnell, nicht immer optimal) → Aufwand vergleichen → Heuristik bewerten.
- Optimierung hilft, Ressourcen wie Kraftstoff, Material und Energie zu sparen.

Selbstcheck

- ☐ Ich kann die Abweichung einer Heuristik in Prozent berechnen – beim Handlungsreisenden und beim Rucksack.
- ☐ Ich kann erklären, warum man eine Heuristik an vielen Probleminstanzen testen muss.
- ☐ Ich kann eine durchschnittliche Abweichung berechnen und zusammen mit dem schlechtesten Fall deuten.
- ☐ Ich kann begründet beurteilen, ob eine Heuristik für den praktischen Einsatz geeignet ist.
- ☐ Ich kann die Begriffe Problem, Probleminstanz, zulässige und optimale Lösung, Brute-Force, Heuristik, Greedy und Aufwand erklären.
- ☐ Ich kann je ein Problem mit faktoriellem und mit exponentiellem Brute-Force-Aufwand nennen.

Gymnasium Ottweiler