3.4 Das Rucksackproblem: Brute-Force und Greedy im Vergleich

Leitidee

Du planst eine Wanderung mit Übernachtung. Zelt, Schlafsack, Kocher, Proviant und Erste-Hilfe-Set liegen bereit – aber alles zusammen ist zu schwer. Dein Rucksack soll höchstens 10 kg wiegen. Was nimmst du mit, damit der Rucksack möglichst nützlich gefüllt ist? Diese Frage heißt **Rucksackproblem**. Es ist ganz anders aufgebaut als das Problem des Handlungsreisenden: Hier gibt es keine Orte und keine Reihenfolge, sondern nur die Frage „mitnehmen oder nicht?“. Trotzdem helfen dieselben Werkzeuge: Brute-Force findet garantiert die beste Auswahl, eine Greedy-Heuristik findet schnell eine gute. In diesem Abschnitt wendest du beide Ansätze an und vergleichst sie.

Lernziele

Nach diesem Abschnitt kannst du

- das Rucksackproblem beschreiben und zulässige und optimale Lösungen dafür angeben,
- erklären, warum es bei n Gegenständen 2^n mögliche Auswahlen gibt,
- den Brute-Force-Ansatz für eine kleine Rucksack-Instanz von Hand durchführen,
- das Wert-Gewicht-Verhältnis berechnen und die Greedy-Heuristik von Hand anwenden,
- Brute-Force und Greedy-Heuristik nach Ergebnis und Aufwand vergleichen,
- eine Probleminstanz konstruieren, bei der die Greedy-Heuristik nicht die optimale Lösung findet.

3.4.1 Das Problem: Was kommt in den Rucksack?

Beim Rucksackproblem hat jeder Gegenstand zwei Eigenschaften: ein **Gewicht** und einen **Wert**. Der Wert gibt an, wie nützlich oder kostbar der Gegenstand ist. Hier messen wir ihn in Euro. Der Rucksack hat eine **Tragkraft**, also ein Höchstgewicht. Gesucht ist eine Auswahl, die möglichst viel wert ist und trotzdem nicht zu schwer.

Auf Englisch heißt das Problem *Knapsack Problem* (gesprochen „näpsäck“, *knapsack* ist ein altes Wort für Rucksack). Es steckt in vielen Alltagsfragen: Welche Pakete lädt man in einen Lieferwagen? Welche Projekte finanziert eine Firma mit ihrem Budget? Welche Fotos passen noch auf die Speicherkarte?

Merke

Beim **Rucksackproblem** (*Knapsack Problem*) stehen mehrere Gegenstände mit jeweils einem **Gewicht** und einem **Wert** zur Verfügung. Gesucht ist die Auswahl von Gegenständen mit **maximalem Gesamtwert**, deren **Gesamtgewicht** eine vorgegebene Tragkraft nicht übersteigt.

Beispiel: Problem und Probleminstanz

Problem: Gegeben sind beliebige Gegenstände mit Gewicht und Wert und ein Rucksack mit einer Tragkraft. Finde eine Auswahl der Gegenstände mit möglichst großem Gesamtwert, deren Gesamtgewicht die Tragkraft nicht übersteigt.

Probleminstanz: Tragkraft **10 kg** und diese fünf Gegenstände:

Gegenstand	Gewicht (kg)	Wert (€)
Zelt	5	60
Schlafsack	4	40
Kocher	2	30
Proviant	3	25
Erste-Hilfe-Set	1	20

Die Probleminstanz ist als **Liste** abstrahiert dargestellt: Farbe, Marke oder Größe der Gegenstände spielen keine Rolle. Die Begriffe aus den letzten Abschnitten passen auch hier:

- Eine **zulässige Lösung** ist eine Auswahl, deren Gesamtgewicht höchstens 10 kg beträgt.
- Das **Kriterium** ist der Gesamtwert. Eine **optimale Lösung** ist eine zulässige Auswahl mit dem **größten** Gesamtwert.

Beachte den Unterschied zum Handlungsreisenden: Dort war die kleinste Länge am besten, hier ist der größte Wert am besten. Beides sind **Optimierungsprobleme** – einmal wird etwas möglichst klein gemacht, einmal möglichst groß.

Arbeitsauftrag 38: Erste Kombinationen

Finde durch Ausprobieren **mindestens zwei** zulässige Kombinationen (Gesamtgewicht höchstens 10 kg) für die Probleminstanz oben. Berechne jeweils Gesamtgewicht und Gesamtwert. Welche deiner Kombinationen ist die beste?

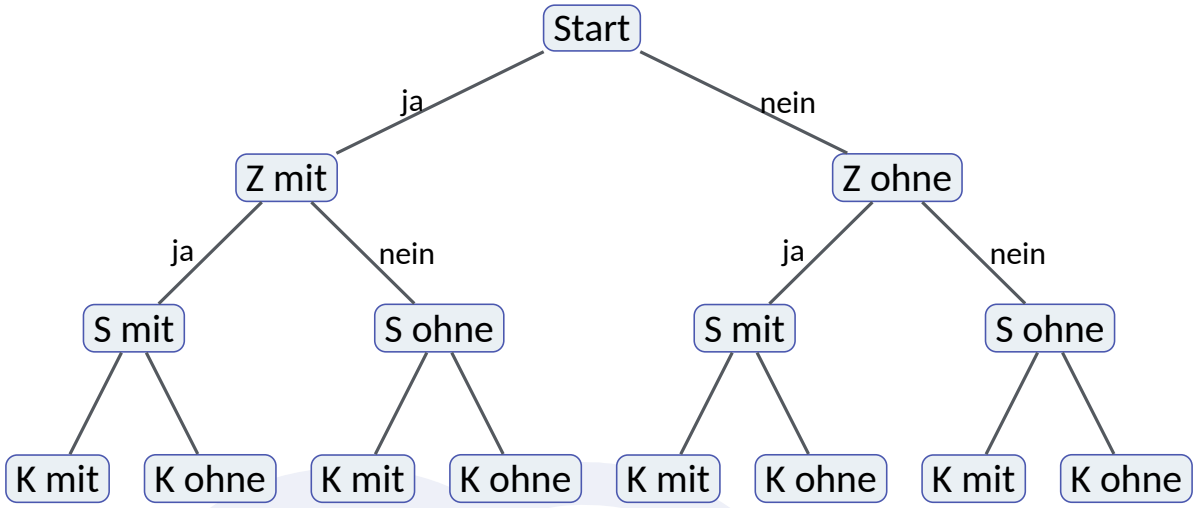
Kombination	Gesamtgewicht (kg)	Gesamtwert (€)

Gymnasium Ottweiler

Meine beste Kombination:

3.4.2 Brute-Force: alle Auswahlen ausprobieren

Wie viele verschiedene Auswahlen gibt es überhaupt? Gehe die Gegenstände der Reihe nach durch. Bei jedem Gegenstand gibt es genau **zwei** Möglichkeiten: Er kommt mit, oder er bleibt da. Bei drei Gegenständen kannst du das als Baum zeichnen:



Bei drei Gegenständen (Z = Zelt, S = Schlafsack, K = Kocher) gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten. Jeder Weg von oben nach unten ist eine Auswahl

Mit jedem weiteren Gegenstand verdoppelt sich die Anzahl der Wege: Jeder bisherige Weg teilt sich in „mit“ und „ohne“. Bei vier Gegenständen sind es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$, bei fünf Gegenständen $2^5 = 32$ Auswahlen.

Eine Auswahl von Gegenständen nennt man in der Mathematik eine **Teilmenge**. Dazu zählen auch die leere Auswahl (nichts einpacken) und die volle Auswahl (alles einpacken).

Definition: Teilmenge

Eine **Teilmenge** einer Menge von Gegenständen ist eine beliebige Auswahl dieser Gegenstände. Auch die leere Auswahl und die Auswahl aller Gegenstände sind Teilmengen. Eine Menge mit n Gegenständen hat 2^n Teilmengen.

Merke

Brute-Force-Ansatz beim Rucksackproblem: Alle möglichen **Teilmengen** der Gegenstände werden gebildet und bewertet – bei n Gegenständen gibt es 2^n Teilmengen (**exponentieller Aufwand**).

Exponentiell heißt: Die Anzahl der Gegenstände steht im **Exponenten**. Jeder zusätzliche Gegenstand verdoppelt die Arbeit. Bei 10 Gegenständen sind es schon $2^{10} = 1024$ Teilmengen.

Teilmengen systematisch aufschreiben

Damit keine Teilmenge fehlt, schreibst du jede Auswahl als Folge von Nullen und Einsen. Die Stellen gehören der Reihe nach zu Zelt (Z), Schlafsack (S), Kocher (K), Proviant (P) und Erste-Hilfe-Set (E). Eine **1** bedeutet „kommt mit“, eine **0** bedeutet „bleibt da“.

Zum Beispiel bedeutet `1 1 0 0 1`: Zelt, Schlafsack und Erste-Hilfe-Set kommen mit. Gewicht: $5+4+1 = 10$ kg, Wert: $60 + 40 + 20 = 120$ €.

Vielleicht erkennst du das Muster wieder: Es sind genau die fünfstelligen Binärzahlen aus dem Kapitel über Schaltungen. Wenn du von `1 1 1 1 1` rückwärts bis `0 0 0 0 0` zählst, bekommst du jede Teilmenge genau einmal.

Tipp

Du sparst Arbeit, wenn du zuerst das Gewicht berechnest. Liegt es über 10 kg, ist die Auswahl nicht zulässig. Dann musst du den Wert nicht mehr ausrechnen – trage einfach ✗ ein.

Arbeitsauftrag 39: Brute-Force von Hand

Führe den Brute-Force-Ansatz für die Probleminstanz mit der Tragkraft 10 kg durch.

1. Berechne für jede der 32 Teilmengen das Gesamtgewicht. Entscheide, ob sie zulässig ist (✓) oder nicht (✗).
2. Berechne für die zulässigen Teilmengen den Gesamtwert.
3. Markiere die optimale Lösung.

Teilmengen **mit** Zelt:

Gymnasium Ottweiler

Nr.	Z S K P E	Gewicht (kg)	Wert (€)	zulässig?
1	1 1 1 1 1			
2	1 1 1 1 0			
3	1 1 1 0 1			
4	1 1 1 0 0			
5	1 1 0 1 1			
6	1 1 0 1 0			
7	1 1 0 0 1			
8	1 1 0 0 0			
9	1 0 1 1 1			
10	1 0 1 1 0			
11	1 0 1 0 1			
12	1 0 1 0 0			
13	1 0 0 1 1			
14	1 0 0 1 0			
15	1 0 0 0 1			
16	1 0 0 0 0			

Teilmengen **ohne** Zelt:

Gymnasium Ottweiler

Nr.	Z S K P E	Gewicht (kg)	Wert (€)	zulässig?
17	0 1 1 1 1			
18	0 1 1 1 0			
19	0 1 1 0 1			
20	0 1 1 0 0			
21	0 1 0 1 1			
22	0 1 0 1 0			
23	0 1 0 0 1			
24	0 1 0 0 0			
25	0 0 1 1 1			
26	0 0 1 1 0			
27	0 0 1 0 1			
28	0 0 1 0 0			
29	0 0 0 1 1			
30	0 0 0 1 0			
31	0 0 0 0 1			
32	0 0 0 0 0			

Optimale Auswahl, Gesamtgewicht und Gesamtwert:

Gymnasium Ottweiler

Arbeitsauftrag 40: Anzahl der Teilmengen

1. Wie viele Teilmengen musstest du im Auftrag *Brute-Force von Hand* insgesamt prüfen? Berechne die Anzahl zuerst mit der Formel 2^n. Überprüfe sie dann durch Abzählen in deiner Tabelle.
2. Wie viele davon waren zulässig?
3. Wie viele Teilmengen müsstest du prüfen, wenn noch eine Trinkflasche als sechster Gegenstand dazukäme?

Deine Antworten:

Mit Brute-Force weißt du jetzt sicher: Die optimale Lösung ist **Zelt, Schlafsack und Erste-Hilfe-Set** mit 10 kg und 120 €. Keine andere zulässige Auswahl ist so viel wert.

Für Interessierte: Brute-Force mit Python

Dieser Unterabschnitt ist freiwillig. Die 32 Teilmengen erzeugst du im Programm genauso wie die Zeilen einer Wahrheitstabelle: mit fünf ineinander geschachtelten Schleifen über `[0, 1]`.

```
namen = ["Zelt", "Schlafsack", "Kocher", "Proviant", "Erste-Hilfe-Set"]
gewichte = [5, 4, 2, 3, 1]
werte = [60, 40, 30, 25, 20]
tragkraft = 10

def gesamt(auswahl, zahlen):
    summe = 0
    for i in range(len(auswahl)):
        if auswahl[i] == 1:
            summe += zahlen[i]
    return summe

anzahl = 0
bester_wert = 0
beste_auswahl = []
for z in [0, 1]:
    for s in [0, 1]:
        for k in [0, 1]:
            for p in [0, 1]:
                for e in [0, 1]:
                    auswahl = [z, s, k, p, e]
                    anzahl += 1
                    gewicht = gesamt(auswahl, gewichte)
                    wert = gesamt(auswahl, werte)
                    if gewicht <= tragkraft and wert > bester_wert:
                        bester_wert = wert
                        beste_auswahl = auswahl

print("Geprüfte Teilmengen:", anzahl)
print("Bester Wert:", bester_wert, "Euro")
print("Gewicht:", gesamt(beste_auswahl, gewichte), "kg")
for i in range(len(namen)):
```

```
33      if beste_auswahl[i] == 1:
34          print("-", namen[i])
```

AUSGABE

```
Geprüfte Teilmengen: 32
Bester Wert: 120 Euro
Gewicht: 10 kg
- Zelt
- Schlafsack
- Erste-Hilfe-Set
```

- **Zeilen 1–4:** Die Probleminstanz als drei Listen. An derselben Stelle (demselben Index) stehen Name, Gewicht und Wert desselben Gegenstands.
- **Zeilen 6–11:** Die Funktion `gesamt` bekommt eine Auswahl wie `[1, 1, 0, 0, 1]` und eine Liste von Zahlen. Sie addiert die Zahlen an den Stellen, an denen in der Auswahl eine 1 steht. Mit `gewichte` liefert sie das Gesamtgewicht, mit `werte` den Gesamtwert.
- **Zeilen 13–15:** Ein Zähler und die bisher beste Lösung. Zu Beginn ist der beste Wert 0 (leerer Rucksack).
- **Zeilen 16–21:** Fünf Schleifen über `[0, 1]` erzeugen alle $2^5 = 32$ Auswahlen, für jeden Gegenstand „ohne“ (0) oder „mit“ (1).
- **Zeilen 22–24:** Der Zähler wird erhöht, Gesamtgewicht und Gesamtwert werden berechnet.
- **Zeilen 25–27:** Ist die Auswahl zulässig **und** besser als die bisher beste, wird sie gemerkt.
- **Zeilen 29–34:** Ausgabe der Anzahl und der optimalen Auswahl.

3.4.3 Greedy: Was ist pro Kilogramm am meisten wert?

Brute-Force ist bei fünf Gegenständen noch machbar. Bei 30 Gegenständen wären es aber 2^{30}, also über eine Milliarde Teilmengen. Gibt es eine schnelle Faustregel?

Eine naheliegende Idee: Pack zuerst den wertvollsten Gegenstand ein. Das ist aber nicht schlau, wenn er sehr schwer ist. Besser ist die Frage: **Wie viel Wert bekomme ich pro Kilogramm?** Das kennst du vom Einkaufen. Auf jedem Preisschild im Supermarkt steht neben dem Preis auch der Grundpreis, zum Beispiel „1 kg = 4,20 €“. Damit kann man Packungen verschiedener Größe vergleichen.

Definition: Wert-Gewicht-Verhältnis

Das **Wert-Gewicht-Verhältnis** eines Gegenstands ist sein Wert geteilt durch sein Gewicht. Es gibt an, wie viel Wert ein Kilogramm dieses Gegenstands bringt.

Für das Zelt ist es zum Beispiel $60 : 5 = 12$, also 12 € pro kg. Je größer das Verhältnis, desto „lohnender“ ist der Gegenstand pro Kilogramm.

Die Greedy-Heuristik für das Rucksackproblem geht so vor:

1. Berechne für jeden Gegenstand das Wert-Gewicht-Verhältnis.
2. Sortiere die Gegenstände nach diesem Verhältnis, den größten Wert zuerst. Haben zwei Gegenstände dasselbe Verhältnis, kommt der zuerst, der in der Liste weiter oben steht.
3. Gehe die sortierte Liste von oben nach unten durch. Passt der Gegenstand noch in den Rucksack, pack ihn ein. Passt er nicht mehr, lass ihn weg und mach mit dem nächsten weiter.

Das ist eine Greedy-Heuristik: Sie nimmt in jedem Schritt den Gegenstand, der im Moment am lohnendsten aussieht. Eine Entscheidung wird nie zurückgenommen.

Merke

Greedy-Heuristik beim Rucksackproblem: Die Gegenstände werden nach ihrem **Wert-Gewicht-Verhältnis** (Wert : Gewicht) sortiert und der Reihe nach eingepackt, solange sie noch hineinpassen – bis kein weiterer Gegenstand mehr hineinpasst.

Beispiel: Greedy beim Tagesausflug

Für einen Tagesausflug darf die Tasche höchstens **4 kg** wiegen. Zur Auswahl stehen:

Gegenstand	Gewicht (kg)	Wert (€)	Verhältnis (€ pro kg)
Fernglas	2	30	$30 : 2 = 15$
Kamera	3	36	$36 : 3 = 12$
Trinkflasche	1	10	$10 : 1 = 10$
Regenjacke	1	8	$8 : 1 = 8$

Die Liste ist schon nach dem Verhältnis sortiert. Jetzt wird gepackt:

Gegenstand	bisheriges Gewicht	passt?	Gewicht danach	Wert danach
Fernglas	0 kg	ja: $0 + 2 = 2 \leq 4$	2 kg	30 €
Kamera	2 kg	nein: $2 + 3 = 5 > 4$	2 kg	30 €
Trinkflasche	2 kg	ja: $2 + 1 = 3 \leq 4$	3 kg	40 €
Regenjacke	3 kg	ja: $3 + 1 = 4 \leq 4$	4 kg	48 €

Ergebnis: Fernglas, Trinkflasche und Regenjacke, 4 kg, **48 €**.

Ein Vergleich mit Brute-Force (bei vier Gegenständen gibt es nur $2^4 = 16$ Teilmengen) zeigt: 48 € ist hier tatsächlich der größte mögliche Wert. Die Heuristik hat also die optimale Lösung gefunden.

Stolperstein

Hör nicht beim ersten Gegenstand auf, der nicht mehr passt! Im Beispiel passt die Kamera nicht, aber die leichteren Gegenstände danach schon. Wer bei der Kamera aufhört, hat nur 30 € statt 48 € im Rucksack. Gehe die Liste immer **bis zum Ende** durch.

Arbeitsauftrag 41: Greedy-Heuristik von Hand

Wende die Greedy-Heuristik auf die Probleminstanz mit Zelt, Schlafsack, Kocher, Proviant und Erste-Hilfe-Set (Tragkraft 10 kg) an.

1. Berechne für jeden Gegenstand das Wert-Gewicht-Verhältnis und sortiere die Gegenstände absteigend danach.
2. Packe nach der Greedy-Regel ein. Lege dazu eine Tabelle an wie im Beispiel *Greedy beim Tagesausflug*.
3. Vergleiche das Ergebnis mit der optimalen Lösung aus dem Brute-Force-Ansatz.

Gegenstand	Gewicht (kg)	Wert (€)	Verhältnis (€ pro kg)
Zelt	5	60	
Schlafsack	4	40	
Kocher	2	30	
Proviant	3	25	
Erste-Hilfe-Set	1	20	

Sortierte Liste, Packtabelle und Vergleich:

Gymnasium Ottweiler

Warum findet Greedy hier nicht das Optimum?

Schau dir die beiden Ergebnisse genau an:

	Greedy-Heuristik	optimale Lösung
Auswahl	Erste-Hilfe-Set, Kocher, Zelt	Zelt, Schlafsack, Erste-Hilfe-Set
Gesamtgewicht	8 kg	10 kg
Gesamtwert	110 €	120 €

Die Greedy-Heuristik nimmt den Kocher, weil er pro Kilogramm sehr lohnend ist. Danach bleiben aber nur noch 2 kg frei, und dafür gibt es keinen passenden Gegenstand mehr. **2 kg Tragkraft bleiben ungenutzt.** Die optimale Lösung lässt den Kocher weg und nutzt die 10 kg mit dem Schlafsack vollständig aus. Die Heuristik betrachtet jeden Gegenstand einzeln. Wie gut die Gegenstände **zusammen** den Rucksack füllen, sieht sie nicht.

Wie groß ist die Abweichung? Beim Rucksack ist ein **größerer** Wert besser. Deshalb rechnet man hier „optimaler Wert minus Wert der Heuristik“:

$$\text{Abweichung} = \frac{\text{optimaler Wert} - \text{Wert der Heuristik}}{\text{optimaler Wert}} \cdot 100\,\% = \frac{120 - 110}{120} \cdot 100\,\% \approx 8{,}3\,\%$$

Die Greedy-Lösung ist also etwa 8,3 % weniger wert als die optimale. Dafür musste die Heuristik nur fünf Verhältnisse berechnen, sie sortieren und fünfmal prüfen, ob etwas passt – statt 32 Teilmengen durchzurechnen.

So kannst du es sagen

So beschreibst du das Ergebnis in Fachsprache:

- *„Greedy war schlechter.“ → „Die Greedy-Heuristik liefert eine zulässige Lösung mit dem Gesamtwert 110 €. Die optimale Lösung hat den Gesamtwert 120 €.“*
- *„Da war noch Platz.“ → „Die Heuristik nutzt die Tragkraft nicht vollständig aus, weil nach der Auswahl der Gegenstände mit dem besten Wert-Gewicht-Verhältnis kein weiterer Gegenstand mehr passt.“*

Gymnasium Ottweiler

3.4.4 Grenzen der Heuristik

Im Beispiel mit dem Tagesausflug war die Greedy-Lösung optimal, bei der Wanderung nicht. Um zu zeigen, dass eine Heuristik **nicht immer** die optimale Lösung findet, genügt ein einziges Beispiel, bei dem sie daneben liegt. So ein Beispiel heißt **Gegenbeispiel**.

Merke

Um zu zeigen, dass eine Heuristik nicht immer optimal ist, genügt **ein Gegenbeispiel**: eine Probleminstanz, bei der die Heuristik eine schlechtere als die optimale Lösung liefert.

Arbeitsauftrag 42: Ein Gegenbeispiel konstruieren

Denke dir eine eigene Probleminstanz mit **drei Gegenständen** aus, bei der die Greedy-Heuristik **nicht** die optimale Lösung findet. Teste deine Instanz mit beiden Ansätzen: Wende die Greedy-Heuristik an, und bestimme die optimale Lösung mit Brute-Force (bei drei Gegenständen gibt es $2^3 = 8$ Teilmengen).

Tipp: Sorge dafür, dass der Gegenstand mit dem besten Verhältnis so schwer ist, dass danach nichts anderes mehr passt.

Deine Probleminstanz und deine Tests:

Gymnasium Ottweiler

Arbeitsauftrag 43: Brute-Force oder Greedy?

Vergleiche den Brute-Force-Ansatz und die Greedy-Heuristik für das Rucksackproblem. Ergänze die Tabelle und beurteile anschließend: Wann würdest du welchen Ansatz verwenden?

	Brute-Force	Greedy-Heuristik
Ist das Ergebnis immer optimal?		
Was muss man rechnen?		
Anzahl Prüfungen bei 5 Gegenständen		
Anzahl Prüfungen bei 30 Gegenständen		

Deine Beurteilung:

3.4.5 Für Interessierte: die Greedy-Heuristik mit Python

Dieser Unterabschnitt ist freiwillig. Statt die Liste zu sortieren, sucht das Programm in jeder Runde den Gegenstand mit dem besten Verhältnis, der noch nicht geprüft wurde. Das ergibt dieselbe Reihenfolge wie das Sortieren.

```python
namen = ["Zelt", "Schlafsack", "Kocher", "Proviant", "Erste-Hilfe-Set"]
gewichte = [5, 4, 2, 3, 1]
werte = [60, 40, 30, 25, 20]
tragkraft = 10

def verhaeltnis(i):
    return werte[i] / gewichte[i]

geprueft = []
gewicht = 0
wert = 0
for runde in range(len(namen)):
    bester = -1
    for i in range(len(namen)):
        if i not in geprueft:
            if bester == -1 or verhaeltnis(i) > verhaeltnis(bester):
                bester = i
    geprueft.append(bester)
    if gewicht + gewichte[bester] <= tragkraft:
        gewicht += gewichte[bester]
        wert += werte[bester]
        print("eingepackt:", namen[bester])
    else:
        print("passt nicht mehr:", namen[bester])

print("Gesamtgewicht:", gewicht, "kg")
print("Gesamtwert:", wert, "Euro")
```

AUSGABE

```
eingepackt: Erste-Hilfe-Set
eingepackt: Kocher
eingepackt: Zelt
passt nicht mehr: Schlafsack
passt nicht mehr: Proviant
Gesamtgewicht: 8 kg
Gesamtwert: 110 Euro
```

- **Zeilen 6–7:** Die Funktion liefert das Wert-Gewicht-Verhältnis des Gegenstands mit dem Index `i`.
- **Zeilen 9–11:** Die Liste `geprueft` merkt sich, welche Gegenstände schon an der Reihe waren. Gewicht und Wert des Rucksacks beginnen bei 0.
- **Zeile 12:** Es gibt so viele Runden wie Gegenstände.
- **Zeilen 13–17:** In jeder Runde wird unter den noch nicht geprüften Gegenständen der mit dem größten Verhältnis gesucht. `bester == -1` bedeutet: Es wurde in dieser Runde noch keiner gefunden.
- **Zeile 18:** Der gefundene Gegenstand gilt jetzt als geprüft.
- **Zeilen 19–24:** Passt er noch, wird er eingepackt. Sonst wird er weggelassen, und die nächste Runde beginnt (**nicht** aufhören!).
- **Zeilen 26–27:** Das Ergebnis stimmt mit deiner Handrechnung überein.

Versuch: Teste dein Gegenbeispiel

Ändere die Listen im Programm so, dass sie dein Gegenbeispiel aus dem Auftrag *Ein Gegenbeispiel konstruieren* enthalten, und ändere die Tragkraft. Liefert das Programm denselben Wert wie deine Handrechnung? Lass dann auch das Brute-Force-Programm mit deiner Instanz laufen. Dort musst du die Anzahl der Schleifen an die Anzahl der Gegenstände anpassen.

3.4.6 Weitere Übungen

Hier kannst du das Gelernte weiter üben. Die Punkte im Titel zeigen, wie schwer eine Aufgabe ist: ●○○ leicht, ●●○ mittel, ●●● knifflig. Fang mit den leichten an.

In mehreren Aufträgen geht es um diese Probleminstanz: Ben will auf dem Flohmarkt verkaufen. In seinen Fahrradanhänger passen höchstens **7 kg**. Er schätzt, wie viel er für jede Sache bekommt.

Gegenstand	Gewicht (kg)	Wert (€)
Comics (C)	1	11
Bücherkiste (K)	4	32
Inline-Skates (I)	2	18
Lautsprecherbox (L)	5	50

Arbeitsauftrag 44: Ein Rucksackproblem im Alltag ●○○

Tim will Videos auf einen USB-Stick kopieren, um sie bei einem Filmabend zu zeigen. Auf den Stick passen 16 GB. Jedes Video hat eine Dateigröße (in GB) und eine Zahl von Likes. Tim möchte Videos mit möglichst vielen Likes zusammen mitnehmen. Seine Liste: „Skate-Tricks“ (4 GB, 120 Likes, 12 Minuten), „Klassenfahrt“ (7 GB, 300 Likes, 25 Minuten), „Katzenvideo“ (2 GB, 90 Likes, 3 Minuten), „Konzert“ (9 GB, 350 Likes, 40 Minuten).

1. Erkläre, was in Tims Situation den **Gegenständen**, dem **Gewicht**, dem **Wert** und der **Tragkraft** entspricht.
2. Stelle die Probleminstanz abstrahiert als Liste dar. Welche Angabe lässt du weg?
3. Handelt es sich um ein Problem oder eine Probleminstanz? Begründe.

Deine Antworten:

Arbeitsauftrag 45: Was passt in den Anhänger? ●○○

Prüfe für Bens Flohmarkt-Instanz jede Auswahl: Berechne das Gesamtgewicht und entscheide, ob sie zulässig ist. Berechne für die zulässigen Auswahlen auch den Gesamtwert.

Auswahl	Gesamtgewicht (kg)	zulässig?	Gesamtwert (€)
Comics, Bücherkiste, Inline-Skates			
Bücherkiste, Lautsprecherbox			
Inline-Skates, Lautsprecherbox			
Comics, Inline-Skates, Lautsprecherbox			
Comics, Lautsprecherbox			

Arbeitsauftrag 46: Wert pro Kilogramm ●○○

1. Berechne für jeden Gegenstand aus Bens Flohmarkt-Instanz das Wert-Gewicht-Verhältnis.
2. Sortiere die Gegenstände absteigend nach diesem Verhältnis.

Gegenstand	Gewicht (kg)	Wert (€)	Verhältnis (€ pro kg)
Comics	1	11	
Bücherkiste	4	32	
Inline-Skates	2	18	
Lautsprecherbox	5	50	

Sortierte Reihenfolge:

Arbeitsauftrag 47: Teilmengen zählen ●○○

1. Lea darf für den Schulausflug drei Dinge einpacken oder weglassen: Apfel (A), Buch (B) und Cap (C). Schreibe alle möglichen Auswahlen auf. Vergiss die leere Auswahl nicht.
2. Ergänze die Tabelle.
3. Erkläre, warum sich die Anzahl verdoppelt, wenn ein Gegenstand dazukommt.

Gegenstände n	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**8**
Teilmengen 2^n						

Deine Auswahlen und deine Erklärung:

Arbeitsauftrag 48: Brute-Force am Flohmarkt ●●○

Bestimme mit dem Brute-Force-Ansatz die optimale Auswahl für Bens Anhänger (Tragkraft 7 kg). Die Buchstaben stehen für Comics (C), Bücherkiste (K), Inline-Skates (I) und Lautsprecherbox (L).

1. Wie viele Teilmengen musst du prüfen?
2. Fülle die Tabelle aus. Berechne zuerst das Gewicht. Ist eine Teilmenge zu schwer, trage ✗ ein und lass den Wert weg.
3. Markiere die optimale Lösung.

Nr.	Auswahl	Gewicht (kg)	zulässig?	Wert (€)
1	keine			
2	L			
3	I			
4	I, L			
5	K			
6	K, L			
7	K, I			
8	K, I, L			
9	C			
10	C, L			
11	C, I			
12	C, I, L			
13	C, K			
14	C, K, L			
15	C, K, I			
16	C, K, I, L			

Anzahl der Teilmengen und optimale Lösung:

Gymnasium Ottweiler

Arbeitsauftrag 49: Greedy am Flohmarkt ●●○

1. Wende die Greedy-Heuristik auf Bens Flohmarkt-Instanz an. Die sortierte Reihenfolge kennst du aus dem Auftrag *Wert pro Kilogramm*. Lege eine Packtabelle an wie im Beispiel *Greedy beim Tagesausflug*.
2. Vergleiche mit der optimalen Lösung aus dem Auftrag *Brute-Force am Flohmarkt*.
3. Erkläre, warum die Heuristik hier nicht die optimale Lösung findet.

Gegenstand	bisheriges Gewicht	passt?	Gewicht danach	Wert danach

Dein Vergleich und deine Erklärung:

Arbeitsauftrag 50: Fehler beim Packen ●●○

Für den Schulbasar transportiert Elif Gebäck in einem Bollerwagen, der höchstens **9 kg** trägt:

Gebäck	Gewicht (kg)	Wert (€)
Waffeln	2	16
Muffins	4	28
Torte	5	30
Kekse	2	10
Limonade	1	4

Elif wendet die Greedy-Heuristik so an:

- Verhältnisse: Waffeln $16 : 2 = 8$, Muffins $28 : 4 = 7$, Torte $30 : 5 = 6$, Kekse $2 : 10 = 0{,}2$, Limonade $4 : 1 = 4$.
- Sortiert: Waffeln, Muffins, Torte, Limonade, Kekse.
- Waffeln passen (2 kg), Muffins passen (6 kg). Die Torte passt nicht mehr ($6 + 5 = 11 > 9$). Fertig.
- Ergebnis: Waffeln und Muffins, 6 kg, 44 €.

1. Finde Elifs **zwei** Fehler und erkläre sie.
2. Wende die Heuristik richtig an. Gib Auswahl, Gesamtgewicht und Gesamtwert an.

Elifs Fehler und deine richtige Lösung:

Arbeitsauftrag 51: Gegenbeispiel oder nicht? ●●●

Drei Personen behaupten, ein Gegenbeispiel für die Greedy-Heuristik gefunden zu haben. Prüfe jede Behauptung: Wende die Greedy-Heuristik an und bestimme mit Brute-Force die optimale Lösung (8 Teilmengen). Entscheide dann, ob wirklich ein Gegenbeispiel vorliegt.

Person	Tragkraft	Gegenstand X	Gegenstand Y	Gegenstand Z
Emma	5 kg	3 kg, 15 €	2 kg, 8 €	2 kg, 7 €
Noah	6 kg	4 kg, 20 €	3 kg, 13 €	3 kg, 12 €
Lea	4 kg	1 kg, 6 €	4 kg, 20 €	3 kg, 12 €

Deine Prüfung:

Gymnasium Ottweiler

3.4.7 Das Wichtigste in Kürze

- Beim **Rucksackproblem** sucht man eine Auswahl von Gegenständen mit **maximalem Gesamtwert**, deren Gesamtgewicht die Tragkraft nicht übersteigt.
- Eine Auswahl ist eine **Teilmenge**. Bei n Gegenständen gibt es 2^n Teilmengen, denn jeder Gegenstand kommt mit oder nicht. Jeder weitere Gegenstand verdoppelt die Anzahl (**exponentielles Wachstum**).
- **Brute-Force** prüft alle 2^n Teilmengen und findet garantiert die optimale Lösung. In der Wanderungs-Instanz: Zelt, Schlafsack und Erste-Hilfe-Set mit 120 €.
- Das **Wert-Gewicht-Verhältnis** ist Wert : Gewicht.
- Die **Greedy-Heuristik** sortiert nach dem Wert-Gewicht-Verhältnis und packt der Reihe nach ein, was noch passt. Sie ist schnell, aber nicht immer optimal (hier 110 € statt 120 €).
- Ein **Gegenbeispiel** genügt, um zu zeigen, dass eine Heuristik nicht immer die optimale Lösung findet.

Selbstcheck

- ☐ Ich kann das Rucksackproblem beschreiben und zulässige Lösungen angeben.
- ☐ Ich kann erklären, warum es bei n Gegenständen 2^n Teilmengen gibt.
- ☐ Ich kann alle Teilmengen einer kleinen Instanz systematisch aufschreiben und die optimale Lösung bestimmen.
- ☐ Ich kann das Wert-Gewicht-Verhältnis berechnen und die Greedy-Heuristik von Hand anwenden.
- ☐ Ich kann erklären, warum die Greedy-Heuristik bei der Wanderung nicht die optimale Lösung findet.
- ☐ Ich kann ein Gegenbeispiel konstruieren, bei dem die Greedy-Heuristik versagt.
- ☐ Ich kann beurteilen, wann Brute-Force und wann die Greedy-Heuristik sinnvoller ist.

Gymnasium Ottweiler