2.8 KV-Diagramme: Terme vereinfachen, Schaltungen sparen

Leitidee

Im letzten Abschnitt hast du die disjunktive Normalform kennengelernt. Sie liefert zu jeder Belegungstabelle einen Term – aber oft einen sehr langen. Für die Alarmanlage hatte die DNF fünf Minterme, obwohl der Term $(T \wedge S) \vee R$ dasselbe leistet. Jedes $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ ist in der Schaltung ein Gatter, und jedes Gatter kostet Geld, Platz und Strom. Deshalb will man Terme so weit wie möglich **vereinfachen**. Ein praktisches Hilfsmittel dafür ist das **Karnaugh-Veitch-Diagramm**, kurz **KV-Diagramm**. Es wurde in den 1950er-Jahren von Edward Veitch und Maurice Karnaugh erfunden. Damit findest du einen kurzen Term, indem du in einer Tabelle Kästchen um Einsen zeichnest.

Lernziele

Nach diesem Abschnitt kannst du

- die Kosten einer Schaltung über die Anzahl ihrer Gatter vergleichen,
- ein KV-Diagramm für zwei, drei und vier Variablen aufstellen und erklären, warum die Spalten in der Reihenfolge 00, 01, 11, 10 stehen,
- Einsen zu Blöcken der Größe 1, 2, 4 und 8 zusammenfassen, auch über den Rand hinweg,
- aus den Blöcken den vereinfachten Term ablesen,
- die vereinfachte Form mit der DNF vergleichen und ihre Äquivalenz mit Python prüfen.

2.8.1 Warum vereinfachen? Die Kosten einer Schaltung

Als einfaches Maß für die Kosten einer Schaltung zählen wir ihre **Gatter**. Dabei gilt:

- Wir nehmen an, dass jedes UND- und jedes ODER-Gatter **zwei** Eingänge hat. Für $A \wedge B \wedge C$ braucht man deshalb **zwei** UND-Gatter: eins für $A \wedge B$, ein zweites, das das Ergebnis mit C verknüpft. (Ein UND-Gatter mit drei Eingängen, wie bei der Fahrstuhltür, zählt also wie zwei Gatter.)
- Jedes NICHT-Gatter zählt mit. Kommt dieselbe negierte Variable mehrmals vor, genügt **ein** NICHT-Gatter: Seine Ausgangsleitung wird einfach verzweigt.

Vergleiche damit die beiden äquivalenten Terme der Alarmanlage (T: Tür offen, S: Scharf, R: Rauch):

Term	UND	ODER	NICHT	Gatter gesamt
DNF mit 5 Mintermen	$5 \cdot 2 = 10$	4	3	**17**
$(T \wedge S) \vee R$	1	1	0	**2**

Die DNF braucht 17 Gatter: Jeder der fünf Minterme hat drei Variablen und braucht zwei UND-Gatter. Vier ODER-Gatter verbinden die fünf Minterme. Und für $\neg T$, $\neg S$ und $\neg R$ braucht man drei NICHT-Gatter. Die einfache Form kommt mit zwei Gattern aus. Beide Schaltungen tun genau dasselbe! Je weniger Gatter, desto billiger, kleiner und sparsamer ist die Schaltung, und desto schneller liegt das Ergebnis vor.

2.8.2 Die Idee: Nachbarn zusammenfassen

Fangen wir klein an. Eine Belegungstabelle mit zwei Variablen hat genau in den Zeilen $A = 0, B = 0$ und $A = 0, B = 1$ eine 1. Die DNF lautet:

$$(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

Schau dir die beiden Minterme genau an. Sie stimmen in $\neg A$ überein und unterscheiden sich nur bei B. Der erste verlangt $B = 0$, der zweite $B = 1$. Zusammen heißt das: Wenn $A = 0$ ist, ist das Ergebnis 1 – **egal**, welchen Wert B hat. B spielt also keine Rolle und **fällt weg**. Übrig bleibt:

$$\neg A$$

Diese Regel ist der Kern der ganzen Methode: Zwei Minterme, die sich nur in **einer** Variablen unterscheiden, kann man zusammenfassen. Die Variable, in der sie sich unterscheiden, fällt weg.

Das prüfen wir mit Python. Beide Terme müssen für alle Belegungen denselben Wert liefern:

```python
def unminimiert(a, b):
    return (not a and not b) or (not a and b)

def minimiert(a, b):
    return not a

for a in [0, 1]:
    for b in [0, 1]:
        print(a, b, unminimiert(a, b) == minimiert(a, b))
```

AUSGABE

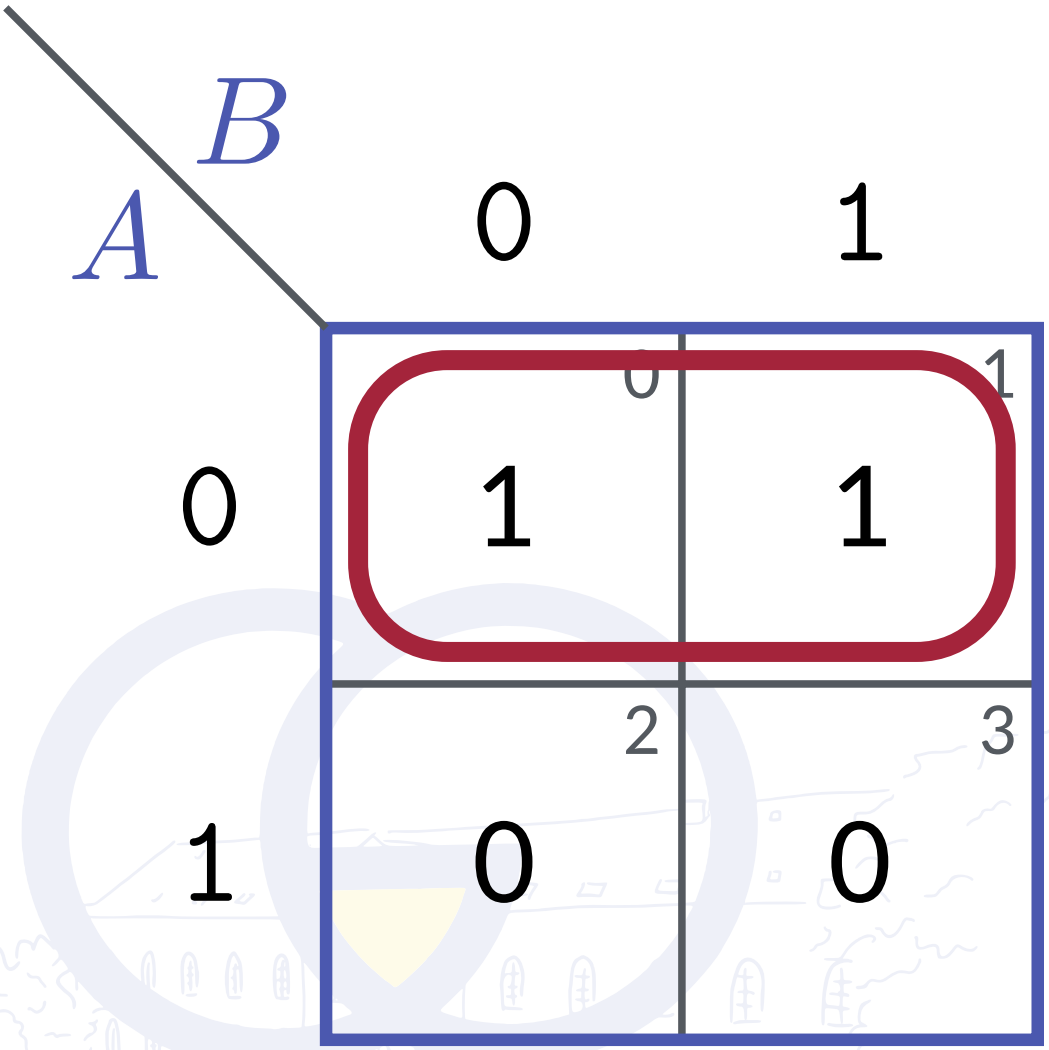
```
0 0 True
0 1 True
1 0 True
1 1 True
```

In jeder Zeile steht `True`: Die beiden Terme sind äquivalent.

Das KV-Diagramm mit zwei Variablen

Um solche Paare schnell zu finden, ordnet man die Zeilen der Belegungstabelle in einem Raster an, dem **KV-Diagramm**. Bei zwei Variablen hat es zwei Zeilen und zwei Spalten. Die Zeile gibt den Wert von A an, die Spalte den Wert von B. In jedem Feld steht der Ausgangswert für diese Belegung. Die kleinen grauen Zahlen sind die Nummern der Zeilen in der Belegungstabelle, gezählt ab 0. Man erhält sie, wenn man die Belegung als Binärzahl liest: Das Feld $A = 1, B = 0$ hat die Nummer $10_2 = 2$.

In unserem Beispiel stehen die beiden Einsen in der oberen Zeile ($A = 0$) nebeneinander. Wir umranden sie als **Block**. Im ganzen Block hat A den Wert 0, B dagegen wechselt. Also bleibt nur $\neg A$ übrig:



KV-Diagramm zu $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$: Die beiden Einsen bilden einen Block mit $A = 0$. Die kleinen grauen Zahlen sind die Zeilennummern der Belegungstabelle

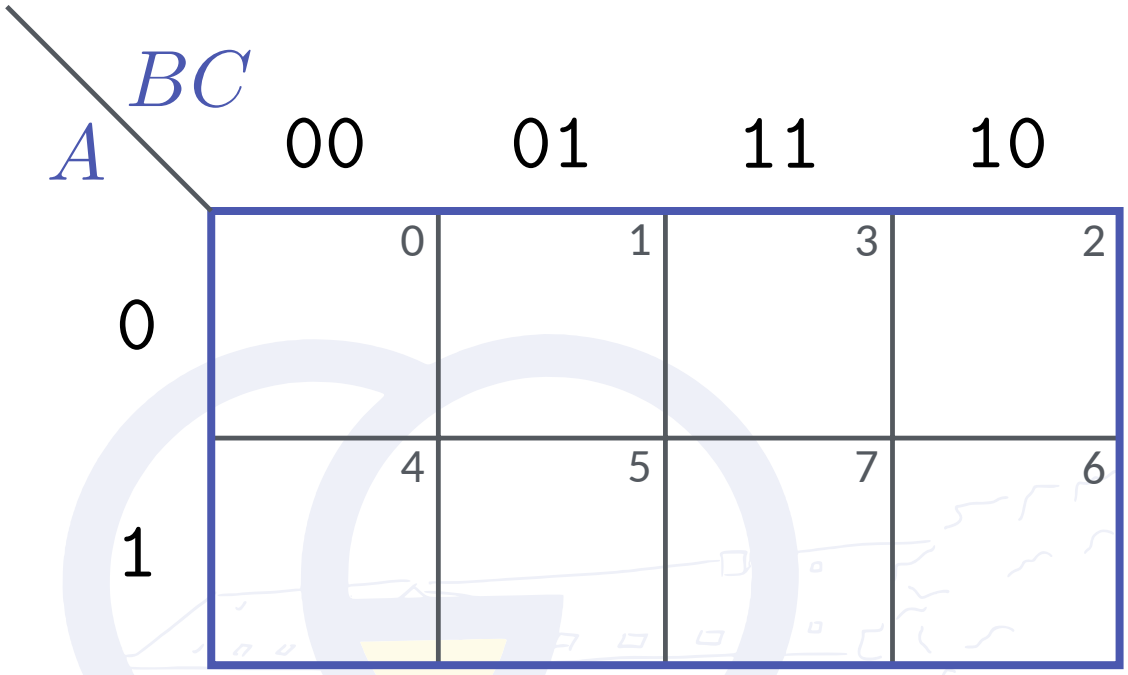
Definition: Karnaugh-Veitch-Diagramm

Ein **Karnaugh-Veitch-Diagramm (KV-Diagramm)** ist eine Anordnung aller Belegungen einer Belegungstabelle in einem Raster. Die Felder sind so angeordnet, dass sich benachbarte Felder in **genau einer** Variablen unterscheiden.

2.8.3 KV-Diagramme mit drei Variablen

Bei drei Variablen hat das KV-Diagramm zwei Zeilen und vier Spalten. Die Zeile gibt den Wert von A an. Die Spalte gibt die Werte von B und C zusammen an. Achtung: Die Spalten stehen **nicht** in der Reihenfolge 00, 01, 10, 11, sondern

$$00, \quad 01, \quad 11, \quad 10.$$



KV-Diagramm für drei Variablen. Die kleine graue Zahl in jedem Feld ist die Nummer der passenden Zeile in der Belegungstabelle

Warum diese seltsame Reihenfolge?

Damit man Nachbarn zusammenfassen kann, müssen sich benachbarte Felder in **genau einer** Variablen unterscheiden. Bei der gewohnten Reihenfolge 00, 01, 10, 11 stünden 01 und 10 nebeneinander. Die beiden unterscheiden sich aber in **beiden** Stellen. In der Reihenfolge 00, 01, 11, 10 ändert sich von Spalte zu Spalte immer nur eine Stelle:

```
00 -> 01    (C ändert sich)
01 -> 11    (B ändert sich)
11 -> 10    (C ändert sich)
10 -> 00    (B ändert sich)
```

Diese Reihenfolge heißt **Gray-Code** (nach dem Ingenieur Frank Gray). Beachte die letzte Zeile: Auch die **letzte und die erste Spalte** unterscheiden sich nur in einer Stelle. Sie sind also ebenfalls Nachbarn, obwohl sie am Rand weit auseinander stehen. Stell dir vor, das Diagramm wäre zu einer Rolle gebogen, sodass der linke und der rechte Rand aneinanderstoßen.

Tipp

Um eine Belegungstabelle ins KV-Diagramm zu übertragen, liest du in jeder Zeile die Belegung als Binärzahl. Die Zeile $A = 1, B = 0, C = 1$ hat die Nummer $101_2 = 5$. Ihr Wert gehört in das Feld in der Zeile $A = 1$ und der Spalte $BC = 01$. Die Feldnummern in der Vorlage oben helfen dir dabei.

Blöcke bilden

Jetzt fassen wir benachbarte Einsen zu **Blöcken** zusammen. Dafür gelten feste Regeln:

1. Ein Block enthält **nur Einsen**.
2. Ein Block ist ein **Rechteck** aus 1, 2, 4 oder 8 Feldern. Blöcke aus 3 oder 6 Feldern gibt es nicht.
3. Blöcke dürfen **über den Rand** gehen: Gegenüberliegende Ränder sind Nachbarn.
4. Blöcke dürfen sich **überlappen**.
5. **Jede** 1 muss in mindestens einem Block liegen.
6. Die Blöcke sollen **so groß wie möglich** sein, und es sollen **so wenige wie möglich** sein.

Zu jedem Block gehört ein Term. Du findest ihn so: Schau, welche Variablen in **allen** Feldern des Blocks **denselben** Wert haben. Nur diese bleiben übrig – mit $\neg$, wenn der Wert 0 ist. Alle anderen fallen weg. Die Terme aller Blöcke werden mit $\vee$ verbunden.

Je größer ein Block ist, desto mehr Variablen fallen weg. Bei drei Variablen bleiben in einem Einzelfeld drei Variablen übrig, in einem Zweierblock zwei, in einem Viererblock eine.

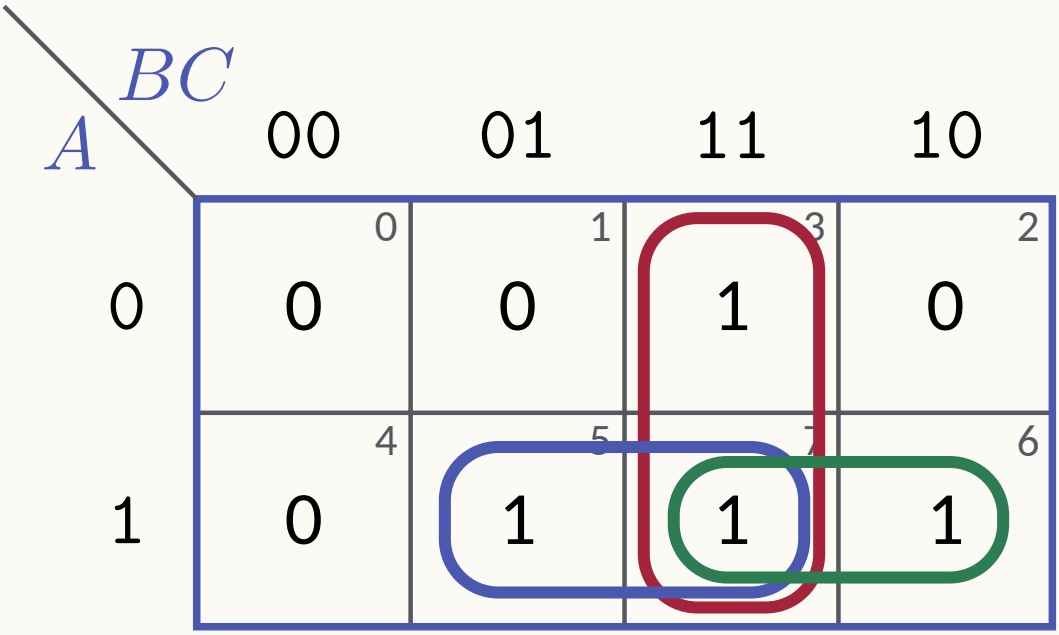
Merke

- Ein **Karnaugh-Veitch-Diagramm (KV-Diagramm)** ordnet alle Belegungen so in einem Raster an, dass sich **benachbarte Felder nur in genau einer Variablen** unterscheiden.
- Benachbarte Einsen werden zu **Blöcken** der Größe 1, 2, 4, 8 … zusammengefasst. Je größer der Block, desto **weniger Variablen** braucht der zugehörige Term.
- Innerhalb eines Blocks fällt jede Variable weg, die sowohl **negiert als auch nicht negiert** vorkommt. Übrig bleiben nur die Variablen, die im gesamten Block **konstant** sind.

Beispiel

Mehrheitsentscheid. Drei Personen A, B, C stimmen ab. Der Ausgang ist 1, wenn mindestens zwei dafür sind. Das ist in den Zeilen 3, 5, 6 und 7 der Belegungstabelle der Fall. Die DNF hat vier Minterme:

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$



KV-Diagramm zum Mehrheitsentscheid: drei Zweierblöcke, die sich im Feld 7 überlappen

Feld 7 hat drei Nachbarn mit einer 1: Feld 3 direkt darüber, Feld 5 links daneben und Feld 6 rechts daneben. Einen Viererblock gibt es nicht, weil die Felder 1, 2 und 4 den Wert 0 haben. Also bildet Feld 7 mit jedem seiner Nachbarn einen Zweierblock:

- **Rot** (Felder 3 und 7): $B = 1$ und $C = 1$ sind konstant, A wechselt. Term: $B \wedge C$.
- **Blau** (Felder 5 und 7): $A = 1$ und $C = 1$ sind konstant, B wechselt. Term: $A \wedge C$.
- **Grün** (Felder 6 und 7): $A = 1$ und $B = 1$ sind konstant, C wechselt. Term: $A \wedge B$.

Der vereinfachte Term lautet $(B \wedge C) \vee (A \wedge C) \vee (A \wedge B)$. Feld 7 liegt in allen drei Blöcken. Das ist erlaubt und sogar nötig, denn sonst könnte man die anderen Einsen nicht in Zweierblöcke packen. Die DNF braucht 14 Gatter (8 UND, 3 ODER, 3 NICHT), die vereinfachte Form nur 5 (3 UND, 2 ODER).

Stolperstein

- **Diagonal ist nicht benachbart.** Zwei Felder, die sich nur an einer Ecke berühren, unterscheiden sich in zwei Variablen. Sie dürfen nicht in einen Zweierblock.
- **Keine Dreierblöcke.** Drei Einsen in einer Reihe deckt man mit zwei überlappenden Zweierblöcken ab.
- **Nicht zu klein.** Wer zwei Zweierblöcke zeichnet, wo ein Viererblock möglich ist, bekommt einen richtigen, aber längeren Term.
- **Rand vergessen.** Viele übersehen Blöcke über den Rand. Prüfe immer: Stehen in der ersten und der letzten Spalte (bei vier Variablen auch in der ersten und der letzten Zeile) Einsen, die man zusammenfassen kann? Wie das aussieht, zeigt der Abschnitt *Über den Rand hinaus* weiter unten.

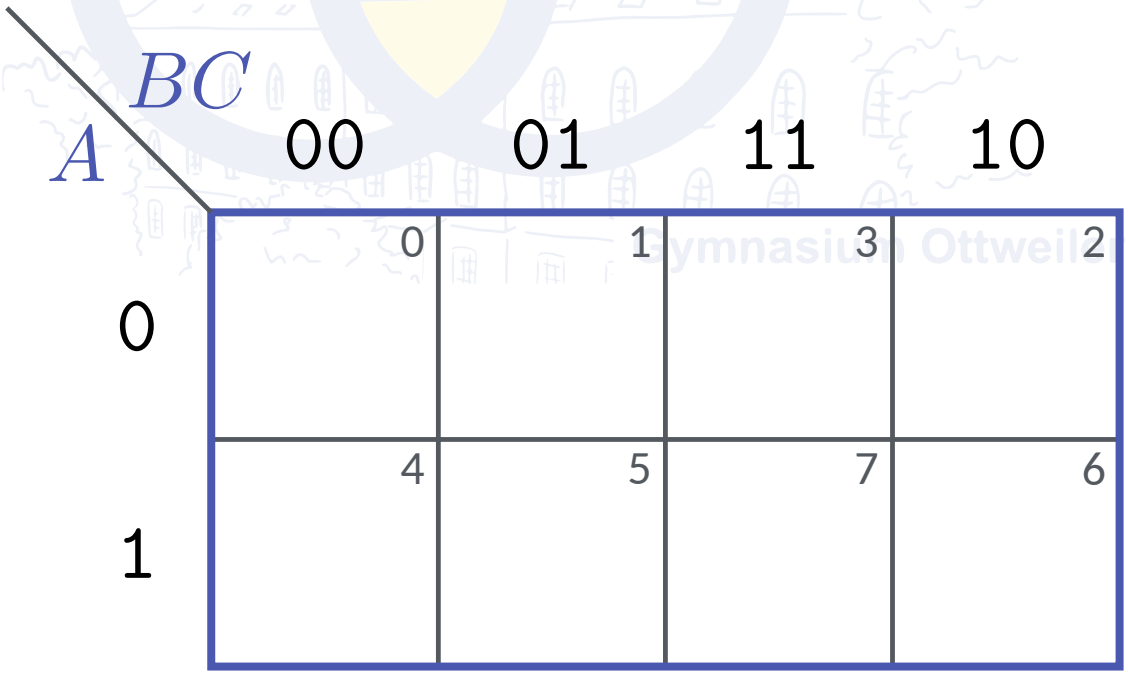
Arbeitsauftrag 90: KV-Diagramm zeichnen und minimieren

Gegeben ist folgende Belegungstabelle für drei Variablen:

A	B	C	**Ausgang**
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

1. Zeichne ein KV-Diagramm und finde die größtmöglichen Blöcke.
2. Notiere die minimierte Form.
3. Überprüfe deine minimierte Form mit Python gegen die unminimierte DNF. Verwende dazu diese Funktion:

```python
def unminimiert_a(a, b, c):
    return ((not a and not b and not c) or (not a and not b and c) or
            (a and not b and not c) or (a and not b and c))
```

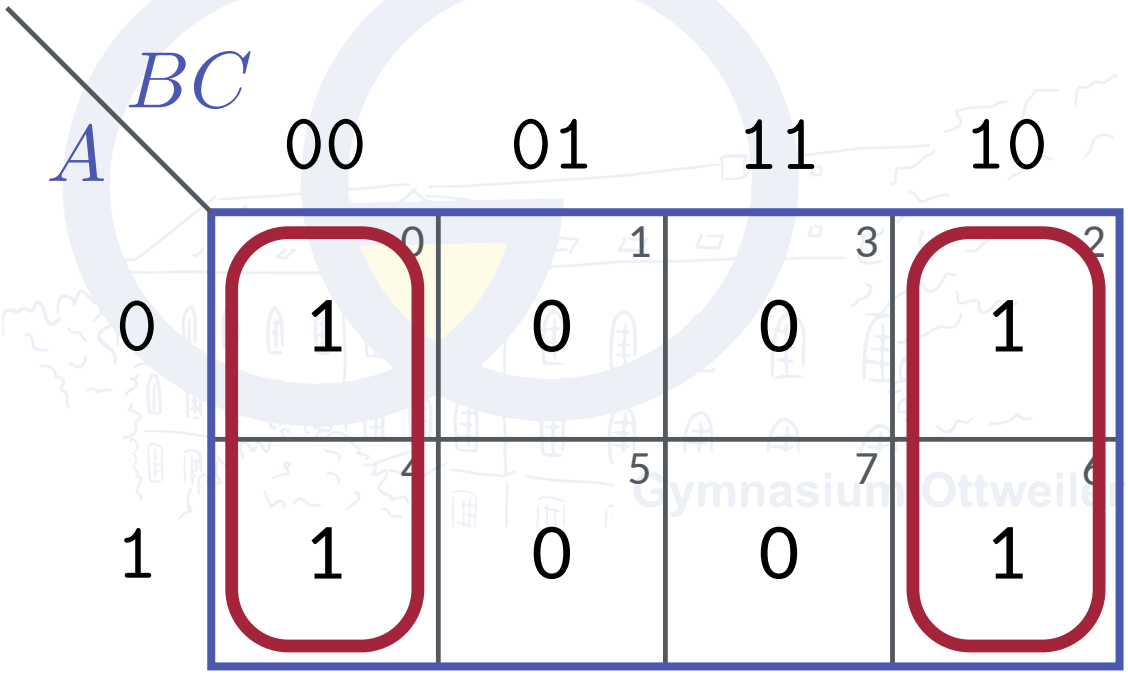


Vorlage zum Ausfüllen: KV-Diagramm für drei Variablen mit Feldnummern

Minimierte Form:

2.8.4 Über den Rand hinaus

Weil der linke und der rechte Rand Nachbarn sind, dürfen Blöcke über den Rand gehen. In diesem Beispiel ist der Ausgang in den Zeilen 0, 2, 4 und 6 gleich 1:



Randüberlappung: Die linke und die rechte Spalte sind Nachbarn. Die vier Einsen bilden einen Block mit $C = 0$

Die Einsen stehen in der ersten Spalte ($BC = 00$) und in der letzten Spalte ($BC = 10$). Diese beiden Spalten unterscheiden sich nur in B. Zusammen bilden die vier Felder einen Viererblock. In der Abbildung ist er als zwei getrennte Rechtecke in derselben Farbe gezeichnet – denk dir die Rolle zusammengebogen, dann stoßen die beiden Teile aneinander. Im Block ist überall $C = 0$, A und B wechseln. Der Term lautet $\neg C$.

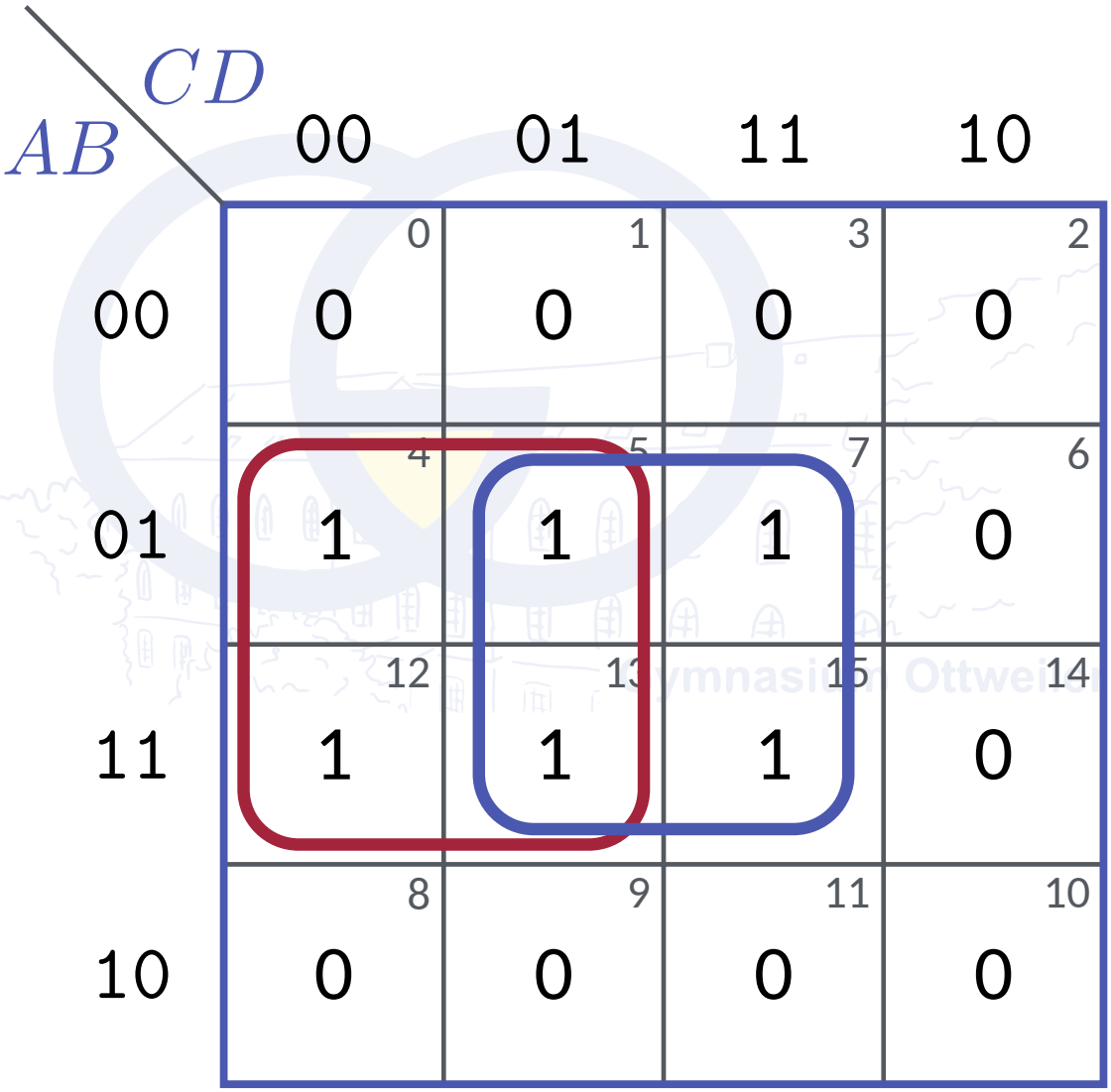
2.8.5 KV-Diagramme mit vier Variablen

Bei vier Variablen hat das KV-Diagramm vier Zeilen und vier Spalten. Die Zeilen geben die Werte von A und B an, die Spalten die Werte von C und D. **Beide** folgen dem Gray-Code 00, 01, 11, 10. Die Feldnummern erhältst du wieder, indem du $ABCD$ als Binärzahl liest. Im ersten Beispiel unten sind sie in jedem Feld eingetragen.

Jetzt sind sowohl der linke und der rechte Rand Nachbarn als auch der obere und der untere Rand. Blöcke dürfen also nach rechts **und** nach unten über den Rand gehen. Bei vier Variablen bleiben in einem Zweierblock drei Variablen übrig, in einem Viererblock zwei und in einem Achterblock nur noch eine.

Beispiel: zwei überlappende Viererblöcke

Der Ausgang ist in den Zeilen 4, 5, 7, 12, 13 und 15 gleich 1:



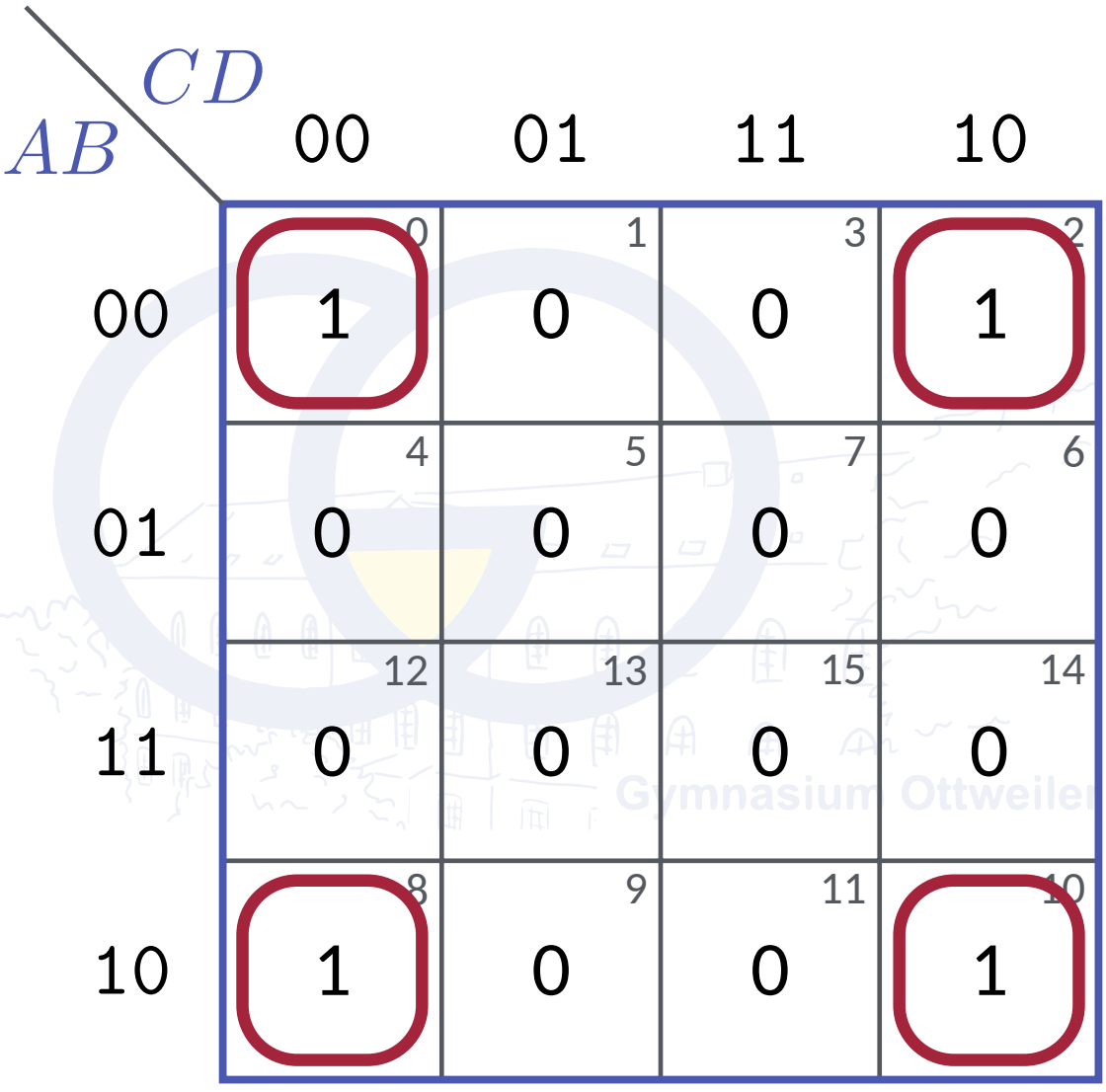
Zwei Viererblöcke, die sich überlappen: $B \wedge \neg C$ (rot) und $B \wedge D$ (blau)

- **Rot** (Felder 4, 5, 12, 13): In beiden Zeilen ist $B = 1$, in beiden Spalten ist $C = 0$. A und D wechseln. Term: $B \wedge \neg C$.
- **Blau** (Felder 5, 7, 13, 15): $B = 1$ und $D = 1$ sind konstant. Term: $B \wedge D$.

Der vereinfachte Term lautet $(B \wedge \neg C) \vee (B \wedge D)$. Die DNF hätte sechs Minterme mit je vier Variablen.

Beispiel: die vier Ecken

Die vier Eckfelder sind alle miteinander benachbart: Links und rechts sind Nachbarn, oben und unten auch. Sind genau die Ecken 1, bilden sie einen Viererblock:

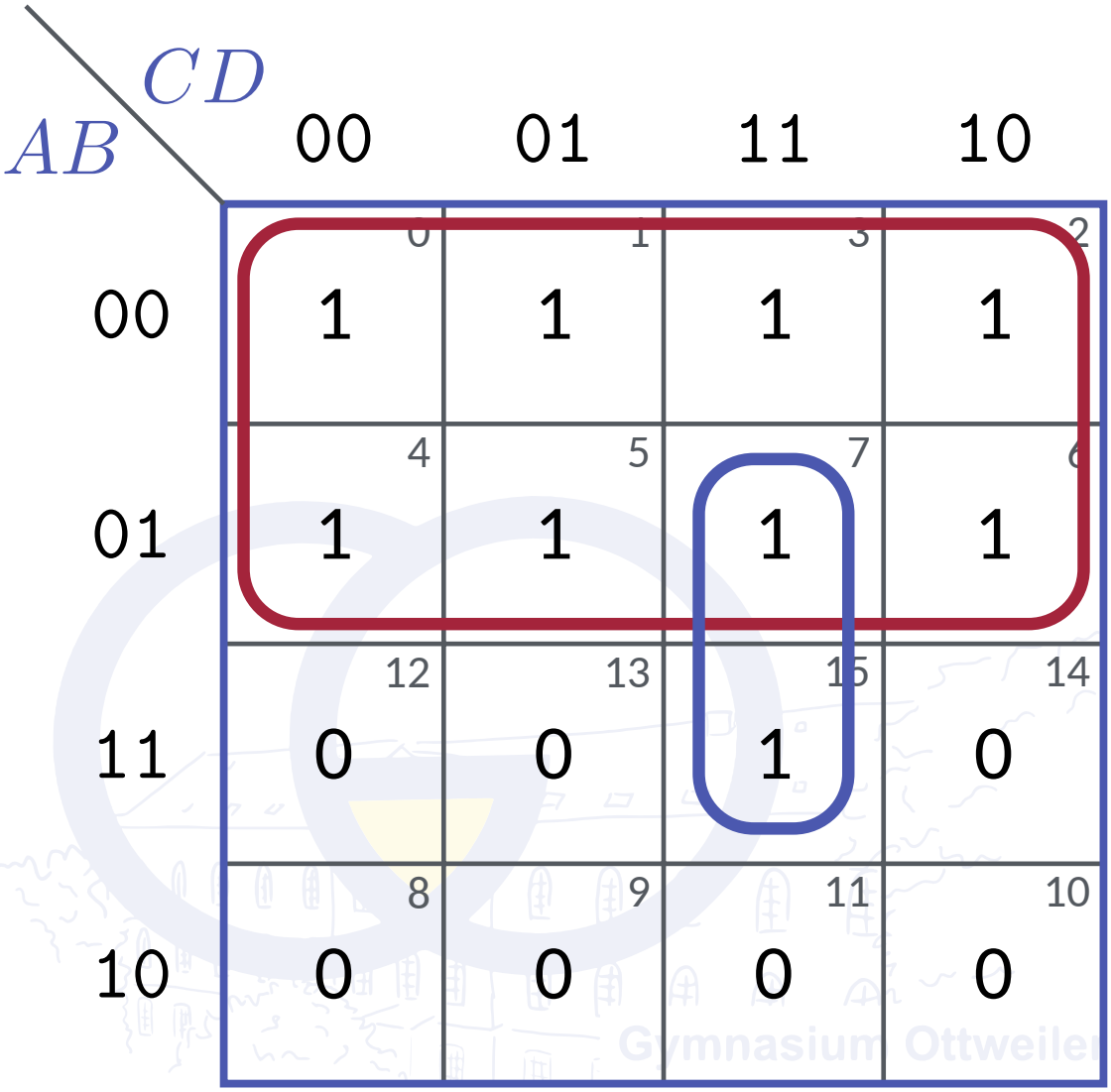


Die vier Ecken sind Nachbarn und bilden einen Viererblock mit $B = 0$ und $D = 0$

In allen vier Ecken ist $B = 0$ (Zeilen 00 und 10) und $D = 0$ (Spalten 00 und 10). Der Term lautet $\neg B \wedge \neg D$.

Beispiel: ein Achterblock

Hier ist der Ausgang in den Zeilen 0 bis 7 und in Zeile 15 gleich 1:



Ein Achterblock ($A = 0$) und ein Zweierblock ($B \wedge C \wedge D$)

- **Rot** (die beiden oberen Zeilen, acht Felder): Nur $A = 0$ ist konstant. Term: $\neg A$.
- **Blau** (Felder 7 und 15): Feld 15 hat keinen Viererblock. Sein bester Partner ist Feld 7 direkt darüber, denn die Zeilen 01 und 11 sind benachbart. $B = 1$, $C = 1$ und $D = 1$ sind konstant. Term: $B \wedge C \wedge D$.

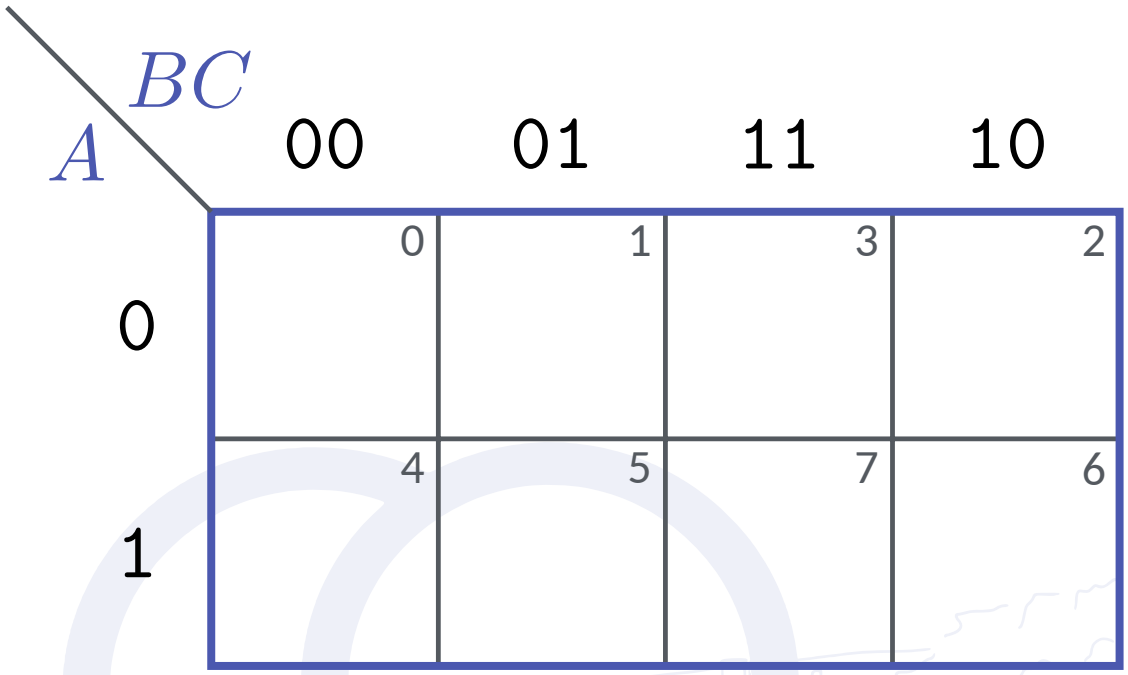
Der vereinfachte Term lautet $\neg A \vee (B \wedge C \wedge D)$. Die DNF hätte neun Minterme.

Arbeitsauftrag 91: KV-Training

Vereinfache mithilfe eines KV-Diagramms. Benutze die Vorlagen unten.

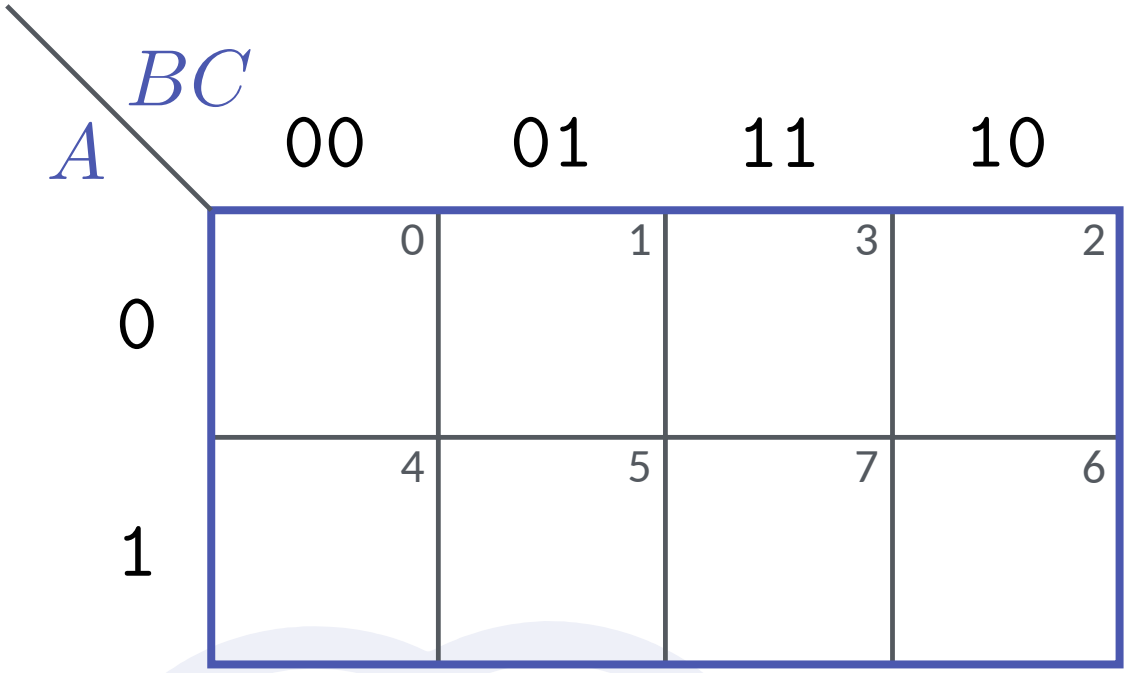
a) die DNF $(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

b) Drei Variablen A, B, C: Der Ausgang ist genau in den Zeilen 0, 2 und 5 der Belegungstabelle 1.
c) Vier Variablen A, B, C, D: Der Ausgang ist genau in den Zeilen 0, 1, 2, 3, 8, 9, 10 und 11 der Belegungstabelle 1.



Vorlage für a)

Gymnasium Ottweiler



Vorlage für b)

Gymnasium Ottweiler

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Vorlage für c)

Meine vereinfachten Terme:

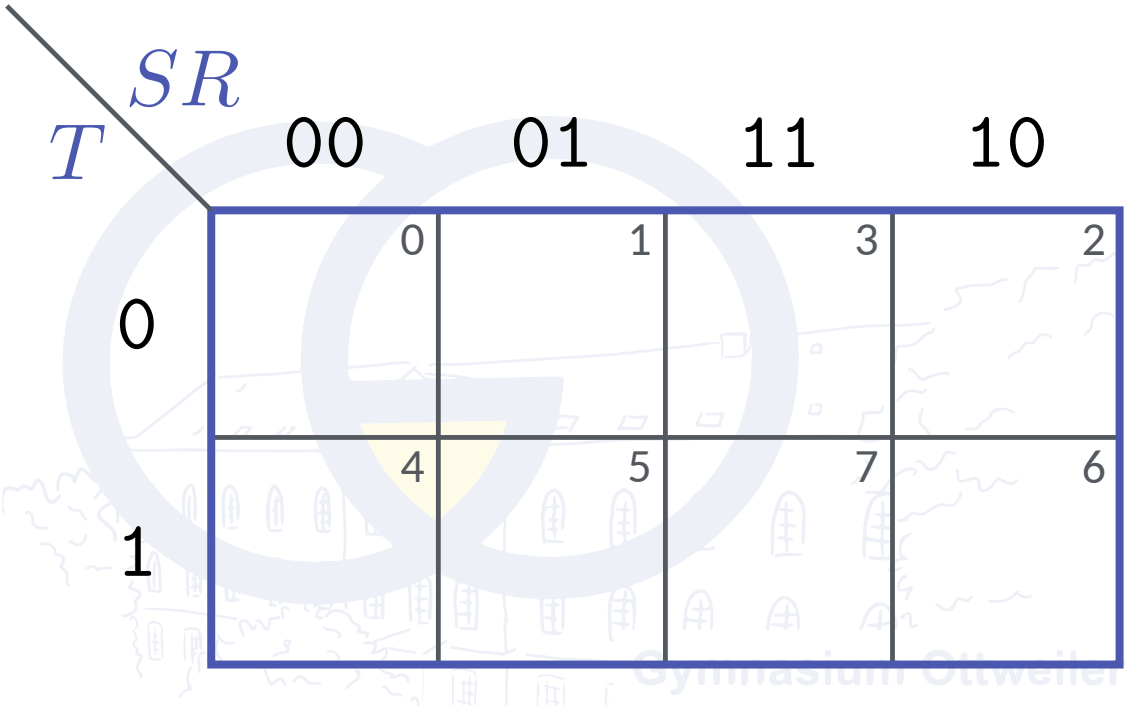
Merke

Das KV-Diagramm liefert eine **minimierte DNF**, die zur ursprünglichen DNF **äquivalent**, aber kürzer ist. Das ist wichtig für **kostengünstigere Schaltungen** (weniger Gatter).

2.8.6 Zurück zur Alarmanlage

Arbeitsauftrag 92: Ist die Alarmanlage minimal?

Erinnere dich an die Alarmanlage: Alarm $=$ (Tür $\wedge$ Scharf) $\vee$ Rauch. Ist dieser Term bereits minimal, oder lässt er sich mit einem KV-Diagramm weiter vereinfachen? Begründe deine Antwort in Worten. Ein Programm brauchst du nicht.



Vorlage: KV-Diagramm mit den Variablen T, S, R

Meine Begründung:

So kannst du es sagen

So sprichst du über KV-Diagramme – vom einfachen zum genauen Satz:

- *„Damit wird der Term kürzer."* → *„Das KV-Diagramm vereinfacht (minimiert) die DNF."*
- *„Die vier Einsen kreise ich ein."* → *„Die vier Felder werden zu einem Block zusammengefasst."*
- *„B ist hier egal."* → *„Im Block kommt B negiert und nicht negiert vor, deshalb fällt B weg."*

Arbeitsauftrag 93 (Zusatz): Vier Variablen, ein Block

Erstelle selbst eine Belegungstabelle mit **vier** Variablen A, B, C, D und mindestens vier 1-Zeilen, die sich zu einem **einzigen** Block zusammenfassen lassen. Gib die DNF und die minimierte Form an. Prüfe deine Minimierung mit Python. Tipp: Verwende vier geschachtelte Schleifen und eine Variable `aequivalent` wie im Abschnitt über Äquivalenz.

Meine Tabelle (als Liste der 1-Zeilen), DNF und minimierte Form:

Gymnasium Ottweiler

2.8.7 Weitere Übungen

Hier kannst du das Gelernte weiter üben. Die Punkte im Titel zeigen, wie schwer eine Aufgabe ist: ●○○ leicht, ●●○ mittel, ●●● knifflig. Fang mit den leichten an.

Arbeitsauftrag 94: Unterscheiden sich die Felder in genau einer Variablen? ●○○

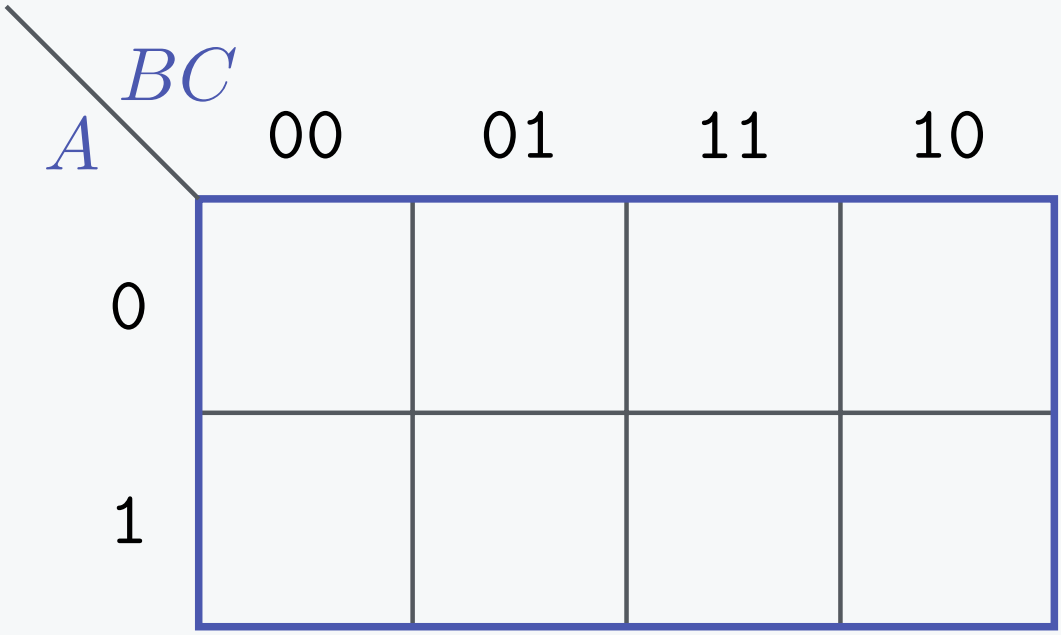
Im KV-Diagramm werden nur Felder zu einem Zweierblock zusammengefasst, die sich in **genau einer** Variablen unterscheiden. Gib für jedes Paar von Belegungen (A, B, C) an, in wie vielen Variablen sie sich unterscheiden und ob man sie zu einem Zweierblock zusammenfassen darf.

Belegung 1	Belegung 2	Anzahl verschiedener Variablen	Zweierblock erlaubt?
0 0 0	0 0 1		
0 1 1	1 1 1		
0 0 1	0 1 0		
1 1 0	1 1 1		
1 0 1	1 1 0		
0 1 0	1 1 0		

Arbeitsauftrag 95: Eine Tabelle ins KV-Diagramm übertragen ●○○

Übertrage die Belegungstabelle in das KV-Diagramm. Achte auf die Reihenfolge der Spalten: 00, 01, 11, 10.

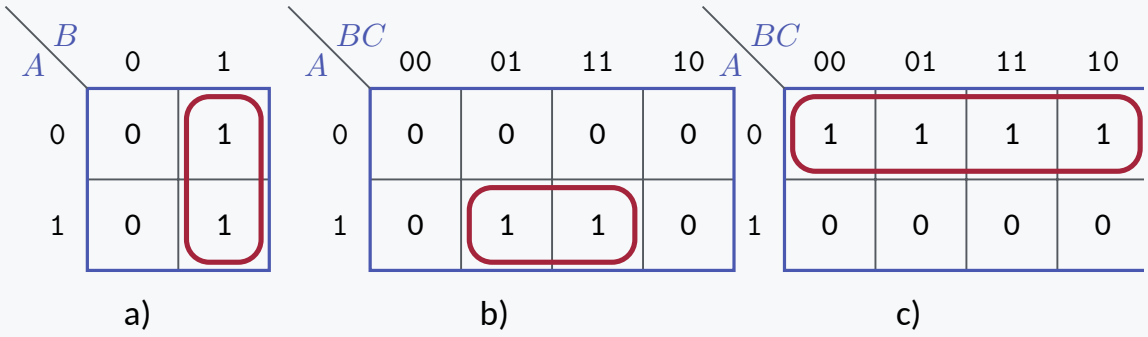
A	B	C	Ausgang
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



Vorlage zum Ausfüllen: KV-Diagramm für drei Variablen

Arbeitsauftrag 96: Blöcke ablesen ●○○

Gib zu jedem eingezeichneten Block den Term an.



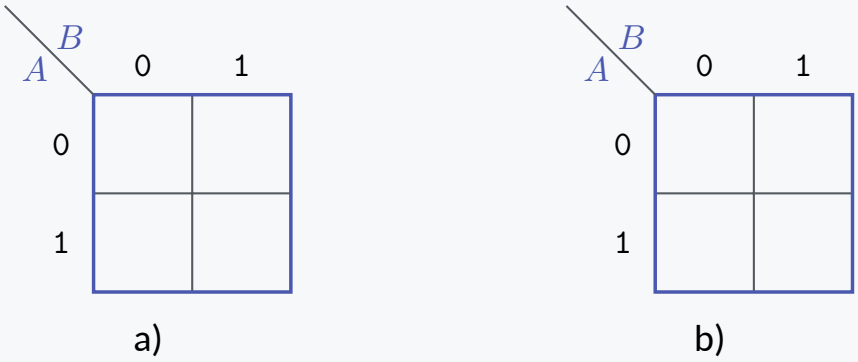
Drei KV-Diagramme mit eingezeichneten Blöcken

Deine Terme:

Arbeitsauftrag 97: Minimieren mit zwei Variablen ●○○

Vereinfache die DNF mithilfe eines KV-Diagramms.

a) $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$
b) $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B)$



Vorlagen für a) und b)

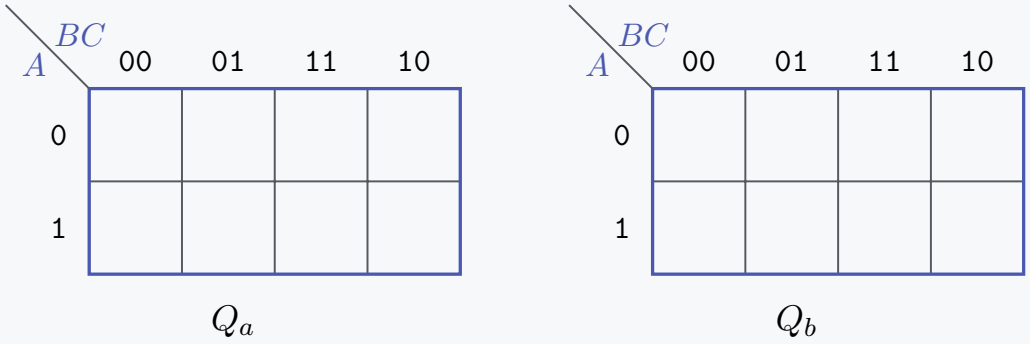
Deine vereinfachten Terme:

Gymnasium Ottweiler

Arbeitsauftrag 98: Minimieren mit drei Variablen ●●○

Die Tabelle enthält zwei Ausgänge Q_a und Q_b. Vereinfache beide mit je einem KV-Diagramm. Prüfe dein Ergebnis zu Q_b mit Python: Vergleiche für alle Belegungen deine vereinfachte Form mit der DNF.

A	B	C	Q_a	Q_b
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1



Vorlagen für Q_a und Q_b

Deine vereinfachten Terme:

Arbeitsauftrag 99: Fehler im KV-Diagramm ●●○

Tom hat ein KV-Diagramm ausgefüllt und die drei Einsen mit einem Block umrandet. Daraus liest er den Term $\neg A$ ab.

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	0	0	0

Toms KV-Diagramm

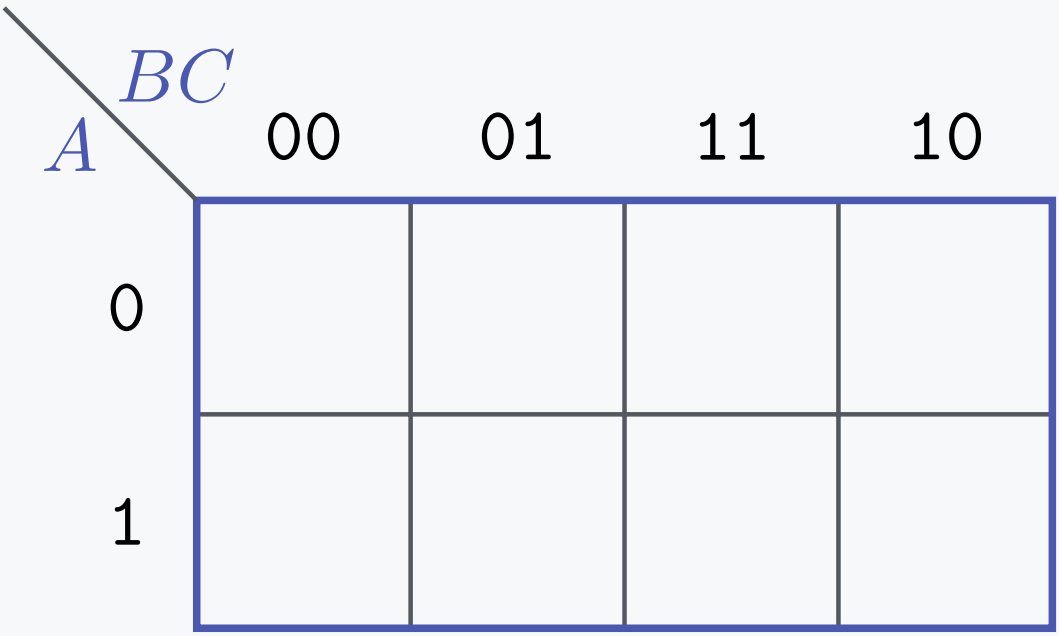
1. Erkläre, welche Regel Tom verletzt hat.
2. Zeige mit einer Belegung, dass sein Term $\neg A$ falsch ist.
3. Gib den richtigen vereinfachten Term an.

Deine Antwort:

Arbeitsauftrag 100: Eine sparsame Schaltung ●●○

Der Ausgang Q einer Schaltung soll genau bei diesen Belegungen 1 sein: $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ und $(1,1,1)$. Die Werte stehen in der Reihenfolge A, B, C.

1. Wie viele Minterme hätte die DNF?
2. Vereinfache mit einem KV-Diagramm.
3. Skizziere die Schaltung zum vereinfachten Term und gib an, wie viele Gatter sie braucht.



Vorlage zum Ausfüllen: KV-Diagramm für drei Variablen

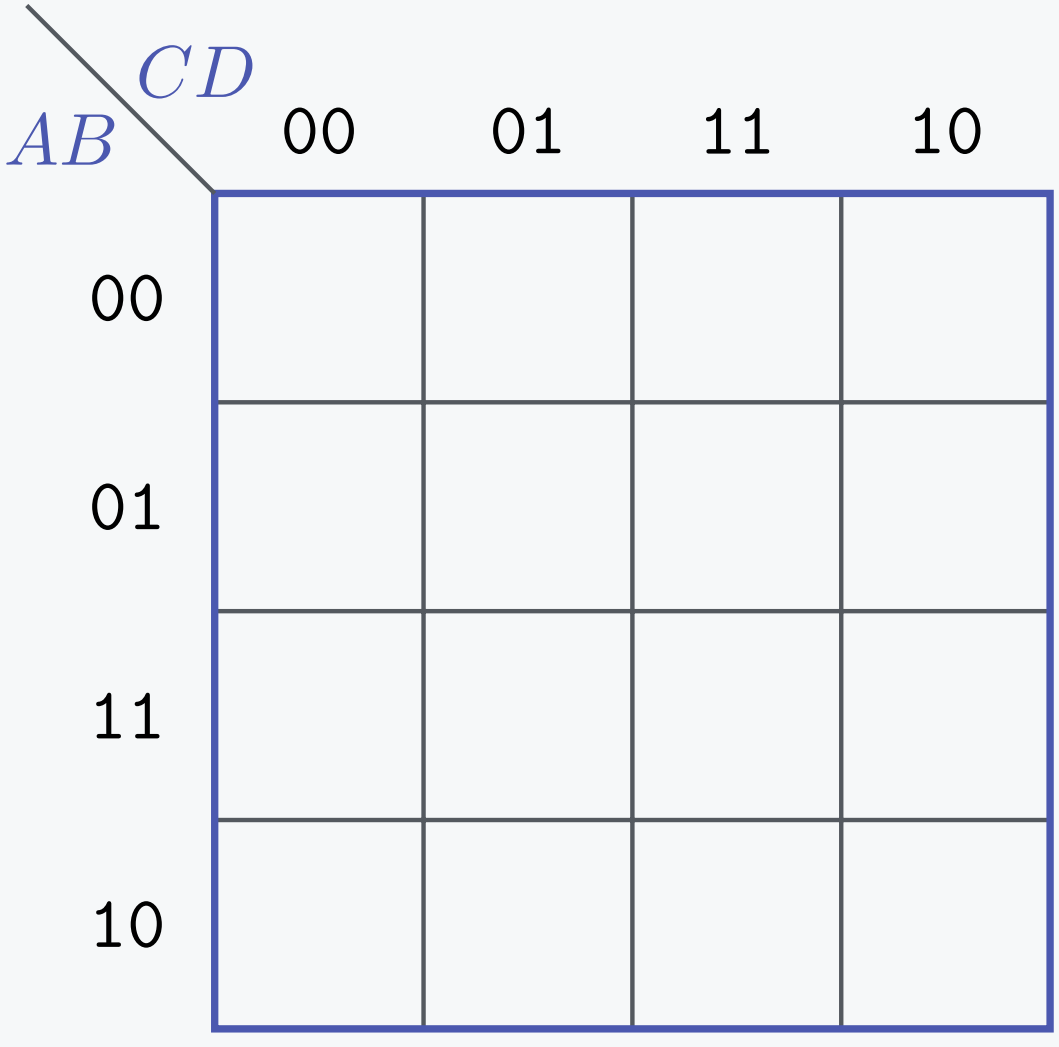
Dein Term und deine Skizze:

Gymnasium Ottweiler

Arbeitsauftrag 101: Vier Variablen ●●●

Vereinfache die DNF mit einem KV-Diagramm für vier Variablen. Prüfe dein Ergebnis mit Python.

$$(\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$$
$$\vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D)$$



Vorlage: KV-Diagramm für vier Variablen

Tipp

Die Zeilen des Diagramms geben A und B an, die Spalten C und D. Beide folgen der Reihenfolge 00, 01, 11, 10. Trage für jeden Minterm eine 1 ein: Für $\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D$ zum Beispiel in die Zeile $AB = 01$ und die Spalte $CD = 01$.

Dein vereinfachter Term:

2.8.8 Das Wichtigste in Kürze

- Die **Kosten** einer Schaltung messen wir an der Anzahl der Gatter. Eine DNF ist oft viel teurer als nötig.
- Im **KV-Diagramm** sind die Belegungen im Gray-Code 00, 01, 11, 10 angeordnet. Benachbarte Felder unterscheiden sich in genau einer Variablen. Auch gegenüberliegende Ränder sind benachbart.
- Benachbarte Einsen werden zu rechteckigen **Blöcken** aus 1, 2, 4 oder 8 Feldern zusammengefasst – so groß und so wenige wie möglich. Blöcke dürfen sich überlappen und über den Rand gehen.
- Zu jedem Block gehört die Konjunktion der Variablen, die im Block **konstant** sind. Die Blockterme werden mit $\vee$ verbunden.
- Das Ergebnis ist eine **minimierte DNF**: äquivalent zur DNF, aber mit weniger Gattern.

Selbstcheck

- ☐ Ich kann die Kosten zweier äquivalenter Schaltungen über die Anzahl der Gatter vergleichen.
- ☐ Ich kann erklären, warum die Spalten im KV-Diagramm in der Reihenfolge 00, 01, 11, 10 stehen.
- ☐ Ich kann eine Belegungstabelle mit zwei, drei oder vier Variablen in ein KV-Diagramm übertragen.
- ☐ Ich kann möglichst große Blöcke bilden, auch über den Rand.
- ☐ Ich kann zu jedem Block den Term ablesen und den vereinfachten Term angeben.
- ☐ Ich kann mit Python prüfen, ob der vereinfachte Term zur DNF äquivalent ist.

Gymnasium Ottweiler